裳華房テキストシリーズ - 物理学

阿部龍蔵・川村 清 監修

電磁気学

兵 頭 俊 夫 著



裳 華 房

阿部龍蔵・川村 清 監修

裳華房テキストシリーズ－物理学

電　磁　気　学

高エネルギー加速器研究機構 特別教授
理 学 博 士
兵 頭 俊 夫　著

裳　　華　　房

ELECTROMAGNETISM

by

Toshio HYODO, DR. SC.

SHOKABO

TOKYO

編　集　趣　旨

「裳華房テキストシリーズ - 物理学」の刊行にあたり，編集委員としてその編集趣旨について概観しておこう．ここ数年来，大学の設置基準の大綱化にともなって，教養部解体による基礎教育の見直しや大学教育全体の再構築が行われ，大学の授業も半期制をとるところが増えてきた．このような事態と直接関係はないかも知れないが，選択科目の自由化により，学生にとってむずかしい内容の物理学はとかく嫌われる傾向にある．特に，高等学校の物理ではこの傾向が強く，物理を十分履修しなかった学生が大学に入学した際の物理教育は各大学における重大な課題となっている．

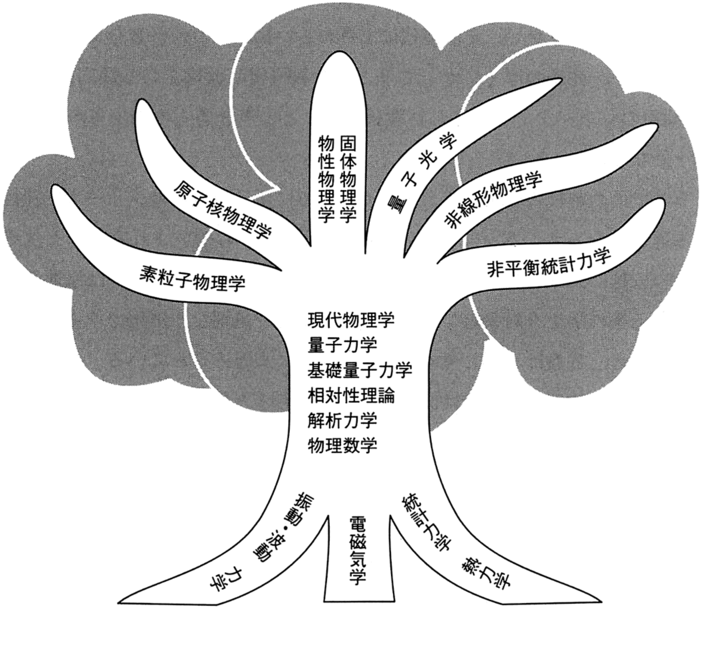
裳華房では古くから，その時代にふさわしい物理学の教科書を企画・出版してきたが，従来の厚くてがっちりとした教科書は敬遠される傾向にあり，“半期用のコンパクトでやさしい教科書を”との声を多くの先生方から聞くようになった．

そこでこの時代の要請に応えるべく，ここに新しい教科書シリーズを刊行する運びとなった．本シリーズは 18 巻の教科書から構成されるが，それぞれその分野にふさわしい著者に執筆をお願いした．本シリーズでは原則的に大学理工系の学生を対象としたが，半期の授業で無理なく消化できることを第一に考え，各巻は理解しやすくコンパクトにまとめられている．ただ，量子力学と物性物理学の分野は例外で半期用のものと通年用のものとの両者を準備した．また，最近の傾向に合わせ，記述は極力平易を旨とし，図もなるべくヴィジュアルに表現されるよう努めた．

このシリーズは，半期という限られた授業時間においても学生が物理学の各分野の基礎を体系的に学べることを目指している．物理学の基礎ともいうべき力学，電磁気学，熱力学のいわば 3 つの根から出発し，物理数学，基礎

量子力学などの幹を経て，物性物理学，素粒子物理学などの枝ともいうべき専門分野に到達しうるようシリーズの内容を工夫した．シリーズ中の各巻の関係については付図のようなチャートにまとめてみたが，ここで下の方ほどより基礎的な分野を表している．もっとも，何が基礎的であるかは読者個人の興味によるもので，そのような点でこのチャートは一つの例であるとご理解願えれば幸いである．系統的に物理学の勉学をする際，本シリーズの各巻が読者の一助となれば編集委員にとって望外の喜びである．

阿部龍蔵，川村 清



はしがき

本書は，大学初年級向けの電磁気学の教科書である．著者が東京大学の一年生向けに行った講義，特に高校物理未履修者向けの講義の経験を生かしてできるだけ平易に書いた．基本法則で考えるという物理学の立場を堅持しつつ，懇切丁寧に記述することに努めた．

電磁気学は，目に見えない「場」を扱う学問なので，初学者にはとりつきにくい面がある．そこで，電磁気学が説明しようと欲する実験事実をまず提示し，それを基本原理から理解する過程を，飛躍を避けつつ解説するようにした．物理的な推論の流れをスムーズにたどれるように，途中の式変形もできるだけ省略しないようにした．[例題] や [演習問題] の解答もあまり省略しなかった．そのため，本シリーズには不似合いのページ数になってしまったが，少ない努力でスムーズに読めるように記述したので，通読は比較的楽にできるはずである．

本書で目指したことは，マクスウェル方程式の積分形による電磁気学の体系の理解と，それに基づいた応用力の養成である．マクスウェル方程式の微分形は最後に付録で解説した．入門的な電磁気学の応用例は積分形で理解できるものが大部分である．微分形は，電磁波の理解等，先に進むときの準備として必要であるが，大学初年級の講義でカバーする内容としては，独立にまとめたこの配列で十分であろう．

導体のみならず，誘電体と磁性体も積極的に扱った．多様な分野に進むことになる学生諸君にとって，これらの物質をマクロな電磁気学がどう扱っているかを知ることは重要なことであると考えたからである．その際，物質のミクロな特徴をとらえたモデルを組み立て，それを粗視化して性質を理解していくという，マクロな電磁気学の立場が明確になるように，記述を工夫し

た．

本書で用いる数学の基本的な事項については，特に第2章をあてて丁寧に解説した．数学を分離することは，物理現象の理解と数学の定義や定理の理解とが混乱しがちな電磁気学においては，特に重要であると考えている．

すべての物理量に対して，次元とSI単位の確認を重視した．最初から個々の物理量の次元や単位の考察に慣れておくと，最終的に電磁気学のSI単位系を正しく理解する助けになる．

著者は，常々「専門家になる人にも専門家にならない人にも役に立つ共通の物理学」を求めている．それは，本質的に重要なことを抽出して，それを歪めずにできる限りやさしい形で提供することの中に存すると考えている．本書でもそれを目指したが，どれほど達成できているかについては，読者のご批判を仰ぎたい．

最後に，本書の執筆の機会を与えてくださり，原稿を丁寧にお読みいただいた阿部龍蔵先生に厚く感謝したい．また，筆の遅い筆者は，裳華房の真喜屋実孜氏の倦むことのない督励をいただいて，ようやくこれを完成することができた．心からお礼を申し上げたい．

1999年10月

兵頭俊夫

目　　　次

1．電場とクーロンの法則

2．数学的基礎　—微分・積分と立体角—

3．ガウスの法則

4．静電場と電位

5．導体と静電場

6．定常電流と直流回路

7．誘電体と静電場

8.　電流の周りの磁場

9.　時間的に変化する場　—電磁誘導・変位電流密度—

10.　過渡現象と交流回路

11．物質の磁気的性質

12．電場・磁場のエネルギー

付録　マクスウェル方程式の微分形

1 電場とクーロンの法則

毛皮で磨いた琥珀が軽いものを引きつけたり，磁石とよばれる特別な鉱物が鉄片を引きつけたりする現象は，古代ギリシャの時代から知られていた．これらの電気および磁気の現象を初めて体系的に研究したのは，英国のエリザベス１世の侍医であった ギルバート（W. Gilbert, 1540 - 1630）である．これに定量的な法則を関連づけたのはクーロン（C. A. de Coulomb, 1738 - 1806）である．彼は，異種の電荷が互いの距離の２乗に反比例する力で引き合うこと，同種の電荷が同じ反比例関係で反発し合うことを確認した．また，磁気についても，同種の極の反発力と異種の極の引力が，同じく極間の距離の２乗に反比例することを見出した．

これは，遠隔作用（離れているもの同士でも力をおよぼし合うという考え方）の法則であるが，英国のファラデー（M. Faraday, 1791 - 1867）は，電荷や磁極の周りには電場や磁場が生じており，もうひとつの電荷や磁極はその場と接触しているために力が発生しているという近接作用（つまり，接触しているもの同士にしか力ははたらかないという考え方）で電磁気学を理解しようとした．

一方，デンマークのエルステッド（H. C. Oersted, 1757 - 1851）によって，電流の周りに磁場が発生していることが見出され，フランスのアンペール（A. M. Ampere, 1775 - 1836）がくわしい研究を行った．ファラデーがこれに続いて，変化する磁場の周りには起電力が発生していることを見出した．そして最後に英国のマクスウェル（J. C. Maxwell, 1831 - 1879）が，電場が変動すれば磁場が発生するという仮定を導入して，電磁気現象の法則を４個の方程式（マクスウェルの方程式）にまとめた．この法則は電磁波の存在を予言し，また，電磁波の速さが光の速さに等しく，光が電磁波の一種に違いないことを示していた．電磁波に関する予言は，ドイツのヘルツ（H. R. Hertz, 1857 - 1894）の実験で実証され，ここに電磁気学は完成した．

本書では，実験で観測される現象を確認しながら，それがマクスウェルの方程式

で表現されることを学ぶ．そのために，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{H}$ の 4 種類の場を導入し，また，マクスウェルの方程式と並ぶ基本法則である電荷の保存則と，(誘導起電力を除いて) マクスウェルの方程式に含まれない起電力という概念，同じくマクスウェルの方程式の守備範囲に収まっていないオームの法則とジュール熱の概念を学ぶ．また，起電力と抵抗，コンデンサー，コイルなどの素子を導線で結合した電気回路の特性，および物質が存在するときのマクロな (巨視的な) 電場や磁場について学ぶ．

§1.1　次元と単位系

物理量は**次元**と大きさをもっている．物理量の次元とは何であるかを一般的に定義することはむずかしいが，その物理量が値の大きさにかかわらず共通にもっている属性である．たとえば，サイコロの一辺の長さ，人の身長，星と星の間の距離などが，長さの次元という共通の属性をもっている．物理量 A の次元を $[A]$ と書く．

複数の物理量（およびその次元）の間の関係は，物理学の基本法則によって定められる．たとえば，力学の基本法則はニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{1.1}$$

で，この方程式には，質量 m，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$，時間 t，力 $\boldsymbol{F}$ の 4 個の量が含まれる．ところが力学の基本方程式はこれしかないから，このうち 3 個の物理量は他の量に還元できない互いに独立な量である．そこで，質量，長さ，時間の 3 つの次元を**基本次元**と定め，それぞれ M，L，T という記号で表す．

物理学を定量的に論じるためには，物理量の**単位**が必要になる．単位は，ある次元の物理量の基準となる大きさである．単位の量の何倍であるかで，物理量の大きさは表現される．たとえば，1.32 m という長さは 1 m という基準の長さの 1.32 倍という意味である．基本次元の単位を人々の合意に基づいて定め，それ以外の量の単位を物理法則によって定めた体系を**単位系**という．

現在，物理学をはじめとして自然科学の世界で用いられている単位系は**SI単位系**（**国際単位系**）とよばれるものである．この単位系での質量，長さ，時間の単位はそれぞれ kg，m，s である．これらがどのように定義された量であるかについては力学の教科書を参照されたい．SI 単位系は日常生活や商取引にも広く用いられている．

電磁気学は，**電荷**，および電荷の運動によって生じる**電流**が関係する現象，つまり**電気**や**磁気**に関する物理学である．電荷の間にはたらく力の原因を力学で説明することはできないので，少なくともひとつ，新しい基本次元を導入する必要がある．実は 1 つだけで十分で，それ以上は必要がない．これは，電気と磁気を結びつける電磁気学の体系が存在して，電磁気現象のすべてを有機的に結びつけて理解することが可能だからである．本書では，つけ加える新しい基本次元として電気量（電荷の量）の次元を選び，Q と記す．

電気量の SI 単位は C（coulomb，**クーロン**）である．電荷の間の力がどの程度の大きさなのかは §1.5 で学ぶ．1 C がどのように決められているかは，ずっと後の第 8 章で学ぶ．実は，SI 単位の基準は電荷ではなく電流である．それは，実用的に電流の単位 A（ampere，**アンペア**）の方が正確に決めることができることと，実生活上最も重要な電気関係の量は，電気量よりはむしろ電圧と電流であることによる．1 C は 1 A の電流が 1 s の間に運ぶ電荷の量と定められているので，1 A が決まれば 1 C も直ちに決まる．つまり，これらの SI 単位の間には

$$\mathrm{C} = \mathrm{A\,s} \tag{1.2}$$

の関係がある．次元について書けば，

$$Q = [I]\,T \tag{1.3}$$

である．このような簡単な関係で結びついているので，基本次元としては電荷 Q を使い，基本単位としては電流の単位 A を用いても混乱することはないだろう．

§1.2　電場と磁場

位置ベクトルの関数として与えられる物理量を**場**という．場には**スカラー量**の場（**スカラー場**）と**ベクトル量**の場（**ベクトル場**）がある．スカラー量は大きさのみをもつ量であり，通常の活字のアルファベットで表す．ベクトル量は大きさと向きをもつ量であり，太文字の活字のアルファベットで表す．スカラー場の例としては，温度の場 $T(\boldsymbol{r})$，質量や電荷の密度の場 $\rho(\boldsymbol{r})$，ポテンシャルの場 $U(\boldsymbol{r})$ 等がある．ベクトル場の例としては，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$，重力場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ 等がある．

大きさのない幾何学的な点に集中した電荷を**点電荷**という．いま，空間のある点 $\boldsymbol{r}$ に点電荷 q が静止しているものとする．もしこの点電荷が力 $\boldsymbol{F}$ を受けているなら，ファラデーの描像によれば，点 $\boldsymbol{r}$ には**電場**

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{F}}{q} \tag{1.4}$$

が存在する．このように定義されるベクトル場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は，**電場の強さ**とよばれることもある．逆に，電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が与えられているとき，点 $\boldsymbol{r}$ の位置に置かれた点電荷 q が受ける力は

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{1.5}$$

である．これから，電場の次元と SI 単位は

$$[E] = [F]Q^{-1} = MLT^{-2}Q^{-1} \quad : \quad \mathrm{N/C} \tag{1.6}$$

である．N は力の単位 newton（**ニュートン**）である．第 4 章で学ぶように，V（ボルト）という単位を導入すると $\boldsymbol{E}$ の単位は V/m で表すこともできる．

一方，もし点電荷 q が位置 $\boldsymbol{r}$ に静止しているときは力を受けず，速度 $\boldsymbol{v}$ で同じ点を運動していると力を受けるならば，点 $\boldsymbol{r}$ にその力

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \quad \text{（狭い意味の\textbf{ローレンツ力}）} \tag{1.7}$$

の元になる場である**磁束密度** $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が存在する．× はベクトル積を表す．ベクトル積については第 8 章で学ぶ．磁束密度の次元と SI 単位は

$$[B] = [F]Q^{-1}[v]^{-1} = MLT^{-2}Q^{-1}TL^{-1} = MT^{-1}Q^{-1} \quad :$$

$$\mathrm{N \cdot s/C \cdot m} = \mathrm{kg/C \cdot s} = \mathrm{T} = \text{tesla}(\textbf{テスラ}) = 10^4\,\mathrm{G} = 10^4\,\text{gauss}(\textbf{ガウス}) \tag{1.8}$$

である．ただし，T が SI 単位であり，G は補助的に使われる．

一般に，電場と磁場が同時に存在するとき，点 $\boldsymbol{r}$ を速度 $\boldsymbol{v}$ で通過しつつある点電荷 q が受ける力は

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{1.9}$$

である．これを（広い意味の）**ローレンツ力**という．つまり，静止した電荷が力を受ければそこには電場が存在し，電荷を 2 つ以上の異なる向きに運動させて少なくともどちらかの場合に電場による力以外の新しい力が加われば，そこには磁場が存在する事になる．(たまたま電荷の運動の向きが磁束密度に平行であると，磁場があっても力が働かないので，2 つ以上の向きに運動させることが必要である．§8.2 のベクトル積の定義を参照のこと．)

§1.3 ベクトル

ベクトル量は矢印で表すことができる．図 1.1(a) のように，矢印の向きがそのベクトル量の向き，長さがその大きさを表す．ベクトル量 $\boldsymbol{A}$ に無次元の

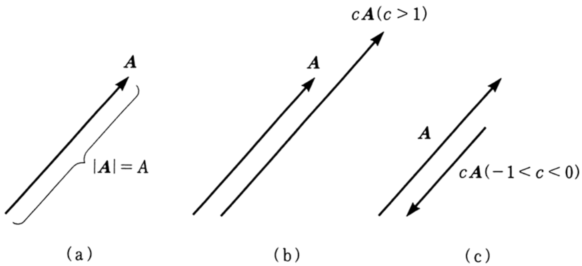


図 1.1

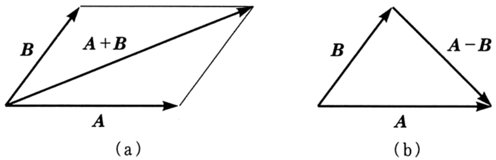


図 1.2

スカラー量 c を乗じた $c\boldsymbol{A}$ は，図 1.1(b) のように，同じ向きをもち，大きさが cA のベクトルである．ただし，$c<0$ のときは図 1.1(c) のように向きが逆転する．また，ベクトルの和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ は図 1.2(a)，(b)に示すようなベクトルである．

ベクトルのスカラー積（内積）

ベクトル量 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の**スカラー積** $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ は次のように定義されるスカラー量である．

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta = AB\cos\theta \qquad (\theta：シータ) \tag{1.10}$$

図 1.3 からわかるように，これは，$\boldsymbol{A}$ の大きさ A と，$\boldsymbol{B}$ の $\boldsymbol{A}$ への正射影の大きさ $B\cos\theta$ の積である．特に，

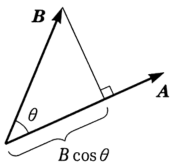


図 1.3

$$\boldsymbol{A} /\!/ \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \iff \theta = \pi/2 \quad (\pi：パイ)$$
$$\text{つまり}\quad \boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B} \tag{1.12}$$

である．ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさを $|\boldsymbol{A}|$ または単に A と書くが，それは

$$|\boldsymbol{A}| = A = \sqrt{A^2} = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} \tag{1.13}$$

で与えられる．

単位ベクトル

大きさ1のベクトルを**単位ベクトル**という．ベクトル $\boldsymbol{A}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_A$ と書くと，

$$\boldsymbol{e}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\boldsymbol{A}}{A} \qquad (1.14)$$

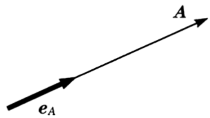


図 1.4

である(図 1.4)．確かに $\boldsymbol{e}_A$ は $\boldsymbol{A}$ と同じ向きで，

$$|\boldsymbol{e}_A| = \left|\frac{\boldsymbol{A}}{A}\right| = \frac{A}{A} = 1 \qquad (1.15)$$

である．単位ベクトルは次元をもたない．

例題 1.1

正三角形の2辺をなす図1.5のようなベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がある．$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ を A を用いて表しなさい．

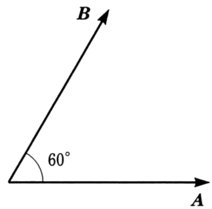


図 1.5

［**解**］　大きさは $A = B$ であり，両ベクトルの間の角度は $\theta = 60°$ だから

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos 60° = \frac{A^2}{2} \qquad (1.16)$$

§1.4　座　標

空間内の注目する点Pの位置を指定するために，空間内に定めた原点OからPに向かうベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いる(図 1.6)．これを**位置ベクトル**という．位置ベクトルに限らず，ベクトルを数量的に

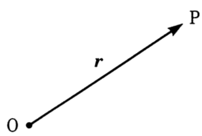


図 1.6

扱うためには**座標系**が必要である．座標系には以下に述べる**デカルト座標**（**標準直角座標**）のほか，第3章で学ぶ**極座標**，**円筒座標**などがある．

3次元デカルト座標

3次元空間の位置の記述には普通，3次元デカルト座標（図1.7）が用いられる．これは，平面内に互いに直交するように x 軸，y 軸，その両方に直交するように z 軸を選んだものである．点Pの位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は，おのおのの軸の正の向きを向いた単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ と，Pから各軸に下した垂線の足の座標 x, y, z を用いると，

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \tag{1.17}$$

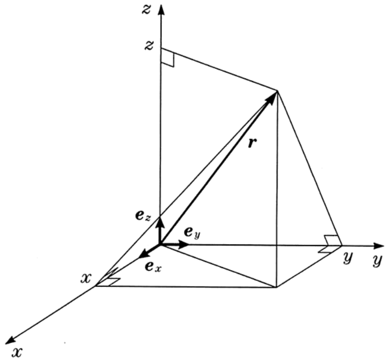


図1.7

と書ける．これを

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) \tag{1.18}$$

とも表す．x，y，z をこの位置ベクトルの x **成分**，y **成分**，z **成分**という．$\boldsymbol{r}$ の大きさは，ピタゴラスの定理より

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.19}$$

である．

各成分の単位ベクトルは当然

$$|\boldsymbol{e}_x| = |\boldsymbol{e}_y| = |\boldsymbol{e}_z| = 1, \qquad \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_x = 0 \tag{1.20}$$

を満たす．

なお，デカルト座標の単位ベクトルを表す記号として，$\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$，あるい

は，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ などが用いられることもある．

ベクトルの成分

位置ベクトル以外のベクトルについても，**成分**を定義すると数値的に取扱うことが可能になる．ベクトル $\boldsymbol{A}$ のデカルト座標における成分は，各単位ベクトルとのスカラー積

$$A_x = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_x, \quad A_y = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_y, \quad A_z = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_z \tag{1.21}$$

で与えられる．すでに学んだ位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の各成分が確かに

$$x = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_x, \quad y = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_y, \quad z = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_z \tag{1.22}$$

であることは明らかであろう．$\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{1.23}$$

もよく用いられる．

$\boldsymbol{r}$ の場合と同様に一般のベクトルはデカルト座標で

$$\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{e}_x + A_y\,\boldsymbol{e}_y + A_z\,\boldsymbol{e}_z \tag{1.24}$$

と表され，これを

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) \tag{1.25}$$

とも表す．

ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ のスカラー積は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_x\,\boldsymbol{e}_x + A_y\,\boldsymbol{e}_y + A_z\,\boldsymbol{e}_z)\cdot(B_x\,\boldsymbol{e}_x + B_y\,\boldsymbol{e}_y + B_z\,\boldsymbol{e}_z)\\ &= A_xB_x\,\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x + A_xB_y\,\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y + A_zB_z\,\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z + \cdots\\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned} \tag{1.26}$$

である．また，$\boldsymbol{A}$ の大きさは (1.13)，(1.26) より

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.27}$$

で与えられる．

例題 1.2

［例題 1.1］で考えたベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ を含む面内にあって $\boldsymbol{A}$ に平行な x 軸とそれに垂直な y 軸をもつデカルト座標の成分で表し，さらに，スカラー積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ を計算しなさい．

［**解**］ 題意より図 1.8 のようにデカルト座標を定めると，

$$\boldsymbol{A} = (A, 0), \quad \boldsymbol{B} = \left(\frac{A}{2}, \frac{\sqrt{3}A}{2}\right) \tag{1.28}$$

である．これより

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A\frac{A}{2} + 0 = \frac{A^2}{2} \tag{1.29}$$

となり，［例題 1.1］の結果と一致する．

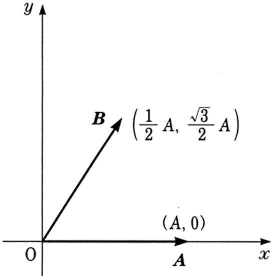


図 1.8

§1.5　クーロンの法則

§1.1 で，電場や磁場を感知する**プローブ**としての点電荷 q（これを**試電荷**という）を考えたが，電場や磁場の原因については触れなかった．実は，電場や磁場の原因も電荷である．ここでは，まず電場について学ぼう．

点電荷 q の周りには電場ができる．それは，試電荷 q' をもってくるとそれが力を受けることからわかる．クーロンが初めて定量的に行い，その後もくり返し行われた実験によると，その力（**クーロン力**）は q と q' の間の距離に反比例する．

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = k\frac{qq'}{r^{2.0}}\boldsymbol{e}_r = k\frac{qq'\boldsymbol{r}}{r^{3.0}} = q'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{1.30}$$

ただし，q の位置を原点に選んで表示した．つまり q が $\boldsymbol{r}$ に作っている電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = k\frac{q}{r^{2.0}}\boldsymbol{e}_r = k\frac{q\boldsymbol{r}}{r^{3.0}} \tag{1.31}$$

のように放射状に広がっている（図1.9）．k の大きさは，電荷 q の単位としてCを用いるSI単位系では，

$$k = 8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2} \tag{1.32}$$

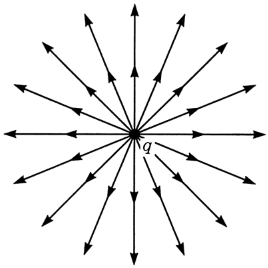


図 1.9

であることが知られている．(1.30)，(1.31)で $r^2(r^3)$ とせずに $r^{2.0}(r^{3.0})$ としたのは，r のべき数が整数の2 (3) であるかどうかは，実験精度の範囲でしか確かめられないからである．現在のところ有効数字16桁まで整数の2 (3) に近いことがわかっている．(よって，このように実数で表示するのは本章だけにとどめ，次章以下ではこれが整数であるとして議論を進める．) ただし，このべき数の精密測定は，力を直接測定したのでは精度がでないので，第3章で学ぶガウスの法則を第5章で学ぶ導体に適用して得られる性質を用いて間接的に行う（図5.7参照）．

図1.10のように，点 $\boldsymbol{r}_1$ に電荷 q_1 があるときの点 $\boldsymbol{r}$ の電場は，$\boldsymbol{r}_1$ に相対的な $\boldsymbol{r}$ の位置ベクトルが $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$ だから

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = k\frac{q_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^{2.0}}\boldsymbol{e}_{r-r_1} = k\frac{q_1(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^{3.0}} \tag{1.33}$$

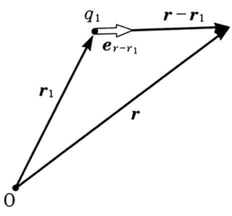


図 1.10

となる．

例題 1.3

陽子の質量は約 1.67×10^{-27} kg であり，電荷は約 1.60×10^{-19} C である．水素分子は2個の陽子が約 7.4×10^{-11} m の距離にあり，その周り

に2個の電子が回っている. 陽子間の反発力の大きさ F_E を求めなさい. また, 陽子間の万有引力の大きさ F_G を求め, F_E と比較しなさい. ただし, 万有引力の定数は $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ である.

[解]

$$F_E = 8.99 \times 10^9 \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{(7.4 \times 10^{-11})^2} = 4.21 \times 10^{-8}\ \mathrm{N} \tag{1.34}$$

$$F_G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{(1.67 \times 10^{-27})^2}{(7.4 \times 10^{-11})^2} = 3.40 \times 10^{-44}\ \mathrm{N} \tag{1.35}$$

よって, $F_E/F_G = 1.2 \times 10^{36}$ だからクーロン力の反発がはるかに大きい. (これを結合させて分子にしているのは, 周りを回っている電子との間の引力である.)

§1.6　重ね合せの原理

実験によると, 図1.11のように2個以上の電荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ が $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ にあるとき, $\boldsymbol{r}$ にできる電場は, 各電荷が作る電場の単なる重ね合せになっている.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= k \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^{2.0}} \boldsymbol{e}_{r-r_i} \\ &= k \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^{3.0}} \end{aligned} \tag{1.36}$$

これを**重ね合せの原理**が成り立っているという.

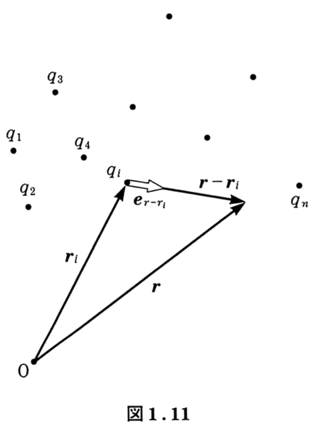


図1.11

演 習 問 題

［**1**］［例題1.1］で考えたベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ を含む面内にあって $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がなす角の二等分線を x 軸とするデカルト座標の成分で表し，さらに，スカラー積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ を計算しなさい．

［**2**］ 1 m 離れた +1 C と −1 C の電荷の間の力を求めなさい．その力は，地表にある何 t（トン$=10^3$ kg）の物体にかかる重力に等しいか．

［**3**］ 同じ大きさの電荷 q が，距離 $2a$ だけ離れて置かれている．電荷を結ぶ線の垂直二等分線上で電場が最も大きい位置を求めなさい．

［**4**］ デカルト座標の原点に点電荷 q があるとき，点 $(a, b, 0)$ の電場の成分を求めなさい．

［**5**］ 辺の長さ a の正三角形 ABC の頂点 A，B に以下のように電荷を置いたときの，点 C における電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を AB を x 軸とする 2 次元デカルト座標の成分で表示しなさい．

（a） 頂点 A，B に同じ大きさ q の電荷を置いたとき．

（b） 頂点 A に大きさ q，頂点 B に $-q$ の電荷を置いたとき．

［**6**］ 正方形 ABCD の頂点 A，B，D にそれぞれ電荷 Q が置かれている．点電荷 q を頂点 C に置いたときと正方形の中心 P に置いたときでは，q の受ける力はどちらが何倍大きいか．

［**7**］（a） z 軸上の 2 点 $(0, 0, \pm d/2)$ に同じ大きさの電荷 $q(>0)$ が存在している．x 軸上の点 $(x, 0, 0)$ および z 軸上の点 $(0, 0, z)$ における電場の大きさと向きを求めなさい．

（b） 次に，$(0, 0, d/2)$ にある電荷 q はそのままにして，$(0, 0, -d/2)$ にある電荷を大きさが等しく符号が異なる電荷 $-q$ に置き換える．このとき，x 軸上の点 $(x, 0, 0)$ および z 軸上の点 $(0, 0, z)$ における電場の大きさと向きを求めなさい．

2 数学的基礎

微分・積分と立体角

物理学の他の分野同様，電磁気学を理解するには数学的な取扱いが必要である．その際，物理の内容の理解と数学的操作を混同しないことが重要である．そのためには，数学的な部分と物理を分離して学ぶのがよい．電磁気学では微分・積分，特にベクトル解析が重要になる．本書では主にマクスウェルの方程式の積分形で解析を行うので，ここでは，ベクトルの線積分，面積分，スカラー量の体積積分，物理量の密度，流束密度と流束，および立体角などについて学ぶ．

§2.1 微　分

スカラー関数 $f(x)$ に対して

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

（Δ：デルタ）　　(2.1)

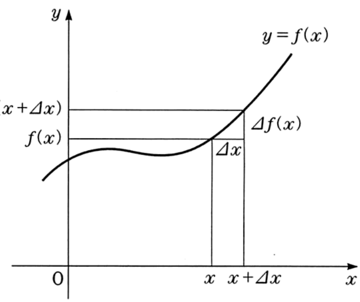


図 2.1

をその**導関数**という．これは，図 2.1 からわかるように，曲線 $y = f(x)$ の $x = x$ における接線の傾きを表す関数で

ある．$f(x)$ から導関数を求める操作を**微分**という．また，x の特定の値 $x = a$ における導関数の値

$$f'(a) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} \tag{2.2}$$

をその点における**微分係数**という．導関数をさらに x に関して微分した

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) \tag{2.3}$$

を 2 次導関数という．さらに高次の導関数も同様に定義でき，n 次の導関数を

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n} \tag{2.4}$$

と書く．

このほか，スカラー関数の偏微分を§4.4 で学び，ベクトル関数の微分については付録で扱う．

§2.2　テイラー展開と近似

関数 $f(x)$ の導関数 $df(x)/dx$ は，曲線 $y = f(x)$ の点 $(x, f(x))$ における接線の傾きを表す関数であるから，図 2.2 より，近似式

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \frac{df(x)}{dx}\Delta x \tag{2.5}$$

が成り立つことがわかる．$f(x)$ が $x = x$ で何回でも微分可能（微分値が $\pm\infty$ にならない）で，級数

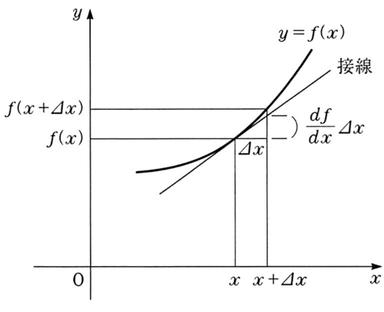


図 2.2

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x)(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(\Delta x)^n + \cdots \tag{2.6}$$

が収束するとき，このべき級数を**テイラー展開**という．特に，$x=0$ の場合は，$x=0$ とおいて，さらに $\Delta x(=x-0)$ をあらためて x と書くと

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + \cdots \tag{2.7}$$

である．これを**マクローリン展開**という．これらの級数を低次の項までで止めれば，その次数までの近似式になる．

例題 2.1

$\sin x$ と $\cos x$ のマクローリン展開を第3項まで求めなさい．

［解］

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x,\quad \frac{d^2\sin x}{dx^2} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x,\quad \frac{d^3\sin x}{dx^3} = -\cos x,\quad \cdots \tag{2.8}$$

より

$$\sin x \approx \sin 0 + (\cos 0)x - \frac{\sin 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin 0}{4!}x^4 + \frac{\cos 0}{5!}x^5$$
$$= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \tag{2.9}$$

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x,\quad \frac{d^2\cos x}{dx^2} = -\frac{d\sin x}{dx} = -\cos x,\quad \frac{d^3\cos x}{dx^3} = \sin x,\quad \cdots \tag{2.10}$$

より

$$\cos x \approx \cos 0 - (\sin 0)x - \frac{\cos 0}{2!}x^2 + \frac{\sin 0}{3!}x^3 + \frac{\cos 0}{4!}x^4$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \tag{2.11}$$

§2.3 (定) 積 分

電磁気学の基本法則は線積分，面積分，あるいは偏微分で書かれる．本書では積分で書かれた形の法則 (マクスウェルの方程式の積分形) を学ぶので，積分の概念と立体角についての理解が必要である．

x 軸上の(線)積分

1 変数 x の関数 $f(x)$ があるとき，$f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの**積分**は，次のような和の極限で定義される量である (図 2.3)．

$$F(a, b) = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i \tag{2.12}$$

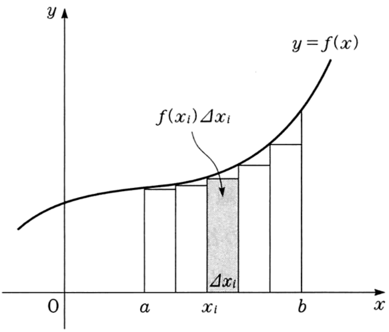


図 2.3

つまりこれは，区間 $[a, b]$ の間を細かく分割して，各点 x_i での $f(x)$ の値 $f(x_i)$ と細かい区間の長さ Δx_i との積の和である．したがって，$f(x_i)\Delta x_i$ が物理的に意味をもつときに，その和である積分 $F(a, b)$ にも物理的な意味が出てくる．

$F(a, b)$ の次元は，(2.12) からわかるように

$$[F] = [f][x] \tag{2.13}$$

である．

例題 2.2

> $\int_a^b dx$ は何を表すか．

[**解**] 積分の定義にしたがうと

$$\int_a^b dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \varDelta x_i = b - a \qquad (2.14)$$

である．つまり，直線の区間$[a, b]$の間を細かく分割してそれをまた加え合わせたものであるから，この区間の長さ $b - a$ に等しい(図2.4)．

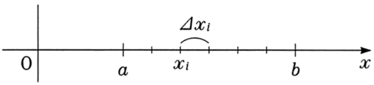


図2.4

空間内の曲線 C 上の線積分

積分の概念を 3 次元空間内の曲線上の和に拡張することは簡単である．点 P と Q を結ぶ曲線 C を細かく区分けして，ある関数の各点での値 $f(\boldsymbol{r}_i)$ とその区間の長さ $\varDelta l_i = |\varDelta \boldsymbol{r}_i|$ の積に意味があるときに，その積の和が，積分

$$F = \int_{\mathrm{P}\,(\mathrm{C})}^{\mathrm{Q}} f(\boldsymbol{r})\,dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{r}_i)\varDelta l_i \qquad (2.15)$$

である．ただし，$dl = |d\boldsymbol{r}|$ である．F の次元は

$$[F] = [f][l] = [f]L \qquad (2.16)$$

である．たとえば，

$$l = \int_{\mathrm{P}\,(\mathrm{C})}^{\mathrm{Q}} dl \qquad (2.17)$$

は曲線に沿って区切った部分の長さを加え合わせたものだから，曲線 P(C)Q の**長さ**であり，$\varDelta \boldsymbol{r}_i$ をベクトルとして加えた

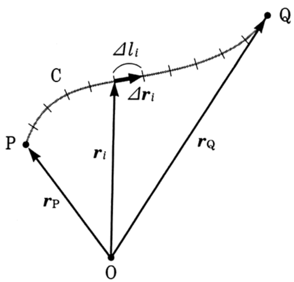


図2.5

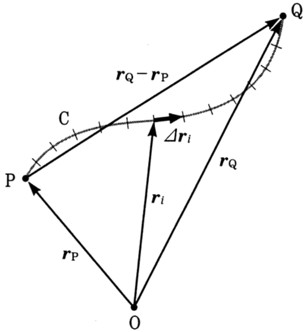


図2.6

$$\int_{\mathrm{P}\atop(\mathrm{C})}^{\mathrm{Q}} d\boldsymbol{r} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{\mathrm{Q}} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{P}} \qquad (2.18)$$

は，図2.6のように点PからQに向かう変位ベクトルを表す．

また，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ があるとき，空間内の経路Cを細かく区分して，各点での $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と微小な変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{r}_i$ とのスカラー積 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i$ に物理的な意味があるとき，その和の極限

$$F = \int_{\mathrm{P}\atop(\mathrm{C})}^{\mathrm{Q}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i \qquad (2.19)$$

は，経路Cに沿ってPからQまでのそのスカラー積の和を意味する（図2.7）．たとえば，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を表すとき，積分(2.19)は点Pから点Qまでのみちのりで力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ のする仕事を表す．

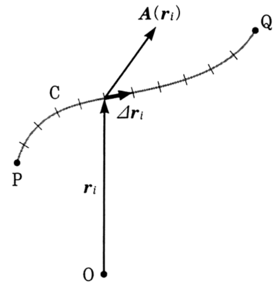


図2.7

面 積 分

2次元あるいは3次元空間内で定義されているスカラー量 $f(\boldsymbol{r})$ があるとき，その空間内の平面あるいは曲面S（図2.8）を細かく区分して，各点でのその量の値 $f(\boldsymbol{r}_i)$ と**面素** ΔS_i との積 $f(\boldsymbol{r}_i)\Delta S_i$ に物理的意味があるとき，

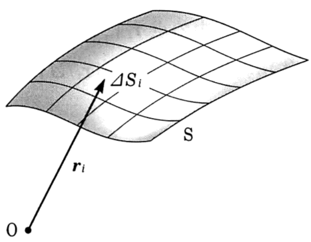


図2.8

$$F = \int_{\mathrm{S}} f(\boldsymbol{r})\, dS = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{r}_i)\Delta S_i \qquad (2.20)$$

はその積の和を表す．これを**面積分**という．F の次元は

$$[F] = [f][S] = [f]L^2 \tag{2.21}$$

である．また，特に

$$A = \int_S dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \tag{2.22}$$

は曲面を区分けして加え合わせただけだから，曲面 S 全体の**面積**を表す．これらの積分を解析的に求めることができるかどうかは別問題である．

なお，デカルト座標の xy 平面，あるいはそれに平行な平面上での面積分は，dS として辺の長さが dx，dy の無限小な長方形を考え，$dS = dx\ dy$ として

$$\int_S f(\boldsymbol{r})\ dS = \iint_S f(x, y)\ dx\ dy \tag{2.23}$$

と書くことができる．ただし，デカルト座標による計算が便利なのは，この二重積分を x，y 軸に沿って順次計算することが可能な場合に限られる．yz 平面あるいは zx 面上の面積分についても同様である．

電磁気学では，流束密度と面素のスカラー積の和を表す面積分の電束密度への応用が重要であるが，流束密度と流束についてはあらためて次節で学ぶ．

体積積分

体積 V 内の各点で定義されている量 $f(\boldsymbol{r})$ があり，体積を区分けしたひとつの区分の中の点 $\boldsymbol{r}_i$ における値 $f(\boldsymbol{r}_i)$ と体積素片 ΔV の積 $f(\boldsymbol{r}_i)\Delta V$ に意味があるとき，

$$F = \int_V f(\boldsymbol{r})\ dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{r}_i)\Delta V_i \tag{2.24}$$

はその積の和を表す．これを体積積分という（図 2.9）．体積積分の次元は

$$[F] = [f][V] = [f]L^3 \tag{2.25}$$

である．特に

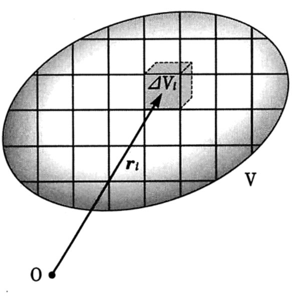


図 2.9

$$V = \int_V dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \tag{2.26}$$

は，体積を区分けして加え合わせただけだから，全体積 V を表す．

なお，体積積分をデカルト座標で標記すると，dV として辺の長さが dx, dy, dz の無限小な直方体を考え，$dV = dx\,dy\,dz$ として

$$\int_V f(\boldsymbol{r})\,dV = \iiint_V f(x, y, z)\ dx\ dy\ dz \tag{2.27}$$

である．ただし，デカルト座標による計算が便利なのは，三重積分を x, y, z 軸に沿って順次計算することが可能な場合に限られる．

§2.4 連続体と密度

まず，電磁気学を離れて，体積 V で質量 M の物体の質量を例として考える．現代のわれわれは，すべての物体は原子というミクロな粒子から成り立っていることを知っている．しかし今はこのことを忘れて，物質はいくらでも細かく分割できるものと見なそう．これは物質を数学的な意味で連続的な存在と考えることに相当する．このように考えた物体を**連続体**という．また，このような考え方は，現代でも，後で学ぶ粗視化の考え方の中に生きている．

$$\rho_{\text{av}} = \frac{M}{V} \qquad (\rho：\quad \text{ロー}) \tag{2.28}$$

をこの物質の**平均密度**という．

次に，図 2.10 のように適当に原点を定め，物質内の任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする．この点の周りに微小な体積 ΔV をとって，その体積に含まれる質量を ΔM とするとき，

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \tag{2.29}$$

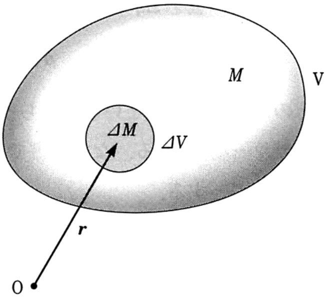


図 2.10

をその点の物質の**密度**という．これは一般に位置に関する連続関数（すなわちスカラー場）である．一様な物質の場合に限り，密度は場所によらず一定で，平均密度に等しい．

物質の平均密度および密度の次元とSI単位は

$$[\rho_{\mathrm{av}}] = [\rho] = ML^{-3} : \quad \mathrm{kg/m^3} \tag{2.30}$$

である．

電荷密度

密度は，質量に限らず，一般に空間に広がって存在するさまざまな物理量に対して定義することができる．電磁気学では**電荷密度**が登場する．体積 V に広がった総量 q の電荷を考える．電荷も実際には電子や原子核などのミクロな粒子が担っているのであるが，いまはこのことを忘れて，数学的な意味で連続的に分布しており，いくらでも細かく分割できると考えよう．これを連続的に分布した電荷という．点電荷と連続的に分布した電荷との関係は，力学における質点と連続体剛体あるいは連続流体の関係に対応する．**連続的電荷分布**全体の平均密度（平均電荷密度）はもちろん

$$\rho_{\mathrm{av}} = \frac{q}{V} \tag{2.31}$$

である．また，任意の点 $\boldsymbol{r}$ の周りに微小な体積 ΔV をとって，その部分に含まれる電荷の量を Δq とするとき，

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \tag{2.32}$$

をその点の**電荷密度**という．もちろんこれは位置に関する連続関数（すなわちスカラー場）である．なお本書では，特に断らない限り，$\rho(\boldsymbol{r})$ は電荷密度を表すものとする．

連続的な電荷分布では，$\Delta V \to 0$ のとき $\Delta q \to 0$ だから $\rho(\boldsymbol{r})$ が有限の値になる．これに対して，点電荷は大きさのない幾何学的な点に有限の大きさの電荷 q があるから，その位置では，$\Delta V \to 0$ としても q は減少しないので，

電荷密度は

$$\rho(\boldsymbol{r}) \to \frac{q}{\varDelta V} \to \infty \tag{2.33}$$

のように無限大に発散してしまう．

厚さのない幾何学的な面の上に連続的な電荷が分布しているときは，微小面積 $\varDelta S$ 内に含まれる電荷 $\varDelta q$ を考えることにより，**面電荷密度**

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varDelta S \to 0} \frac{\varDelta q}{\varDelta S} \qquad (\sigma：\quad シグマ) \tag{2.34}$$

を定義できる．また，太さのない幾何学的な線の上に連続的な電荷が分布しているときは，微小線分 $\varDelta l$ 内に含まれる電荷 $\varDelta q$ を考えることにより，**線電荷密度**

$$\lambda(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varDelta l \to 0} \frac{\varDelta q}{\varDelta l} \qquad (\lambda：\quad ラムダ) \tag{2.35}$$

を定義できる．ただし，いずれの場合も体積電荷密度としてみるときは無限大に発散していることに注意する．$\varDelta S$ や $\varDelta l$ の体積は 0 だからである．

これらの電荷密度の次元と SI 単位は

$$[\rho(\boldsymbol{r})] = QL^{-3}：\quad \mathrm{C/m^3} \tag{2.36}$$

$$[\sigma(\boldsymbol{r})] = QL^{-2}：\quad \mathrm{C/m^2} \tag{2.37}$$

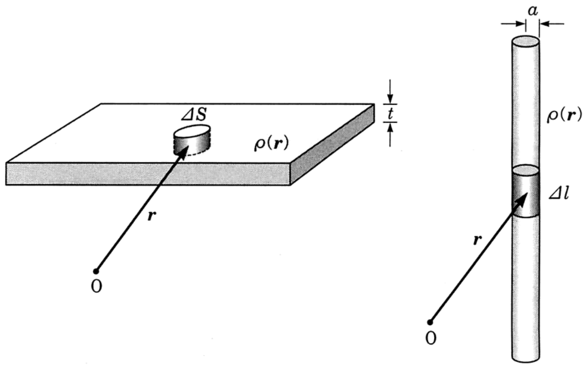
$$[\lambda(\boldsymbol{r})] = QL^{-1}：\quad \mathrm{C/m} \tag{2.38}$$

である．

例題 2.3

（1）　図 2.11(a) のような厚さ t の薄い板状の領域に密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ で電荷が分布しているとき，この分布を，厚さを無視して面電荷密度で表現しなさい．

（2）　図 2.11(b) のような半径 a の細い線状の領域に密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ で電荷が分布しているとき，この分布を，線の太さを無視して線電荷密度で表現しなさい．



（a）　　　　（b）

図 2.11

［**解**］（1）　点 $\boldsymbol{r}$ の付近に面積 ΔS の領域を切り出すと，この部分には $\Delta q \approx \rho(\boldsymbol{r})\,t\,\Delta S$ の電荷が含まれるから，

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = t\,\rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.39}$$

（2）　点 $\boldsymbol{r}$ の付近に長さ Δl の領域を切り出すと，この部分には $\Delta q \approx \rho(\boldsymbol{r})\,\pi a^2 \Delta l$ の電荷が含まれるから，

$$\lambda(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \pi a^2 \rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.40}$$

逆に，電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ が与えられているとき，点 $\boldsymbol{r}$ の周りの微小体積 ΔV に含まれる電荷 Δq は

$$\Delta q \approx \rho(\boldsymbol{r})\Delta V \tag{2.41}$$

である．$\approx$ なのは，微小な ΔV 内部で密度が一定とは限らないからである．$\Delta V \to 0$ の極限で $\approx$ は $=$ になる．この極限の関係式を本書では

$$dq = \rho(\boldsymbol{r})\,dV \tag{2.42}$$

のように表記することにする．［dS や dV は無限小なので，本来は図に描けないが，本書では ΔS や ΔV と同じように描く．］

体積 V 内の電荷の総量は，体積を区分けして各区分の中に含まれる電荷の量 $\rho(\boldsymbol{r}_i)\Delta V_i$ を加え合わせればよいから，体積積分で与えられ，

$$q = \int_{\mathrm{V}} \rho(\boldsymbol{r})\ dV \tag{2.43}$$

である．

同様に，面密度 $\sigma(\boldsymbol{r})$ の面電荷分布を含む曲面 S に含まれる電荷の総量は

$$q = \int_{\mathrm{S}} \sigma(\boldsymbol{r})\ dS \tag{2.44}$$

線密度 $\lambda(\boldsymbol{r})$ の線電荷分布を含む曲線 l に含まれる電荷の総量は

$$q = \int_{l} \lambda(\boldsymbol{r})\ dl \tag{2.45}$$

である．

§2.5　流束密度の場（ベクトル場）と流束

図 2.12 のように，空間中を何か物理量が流れているとする．川の流れのような物質（水）の流れでもよいし電荷の流れでもよい．ただし，流れているものは連続体として扱えるものと仮定する．

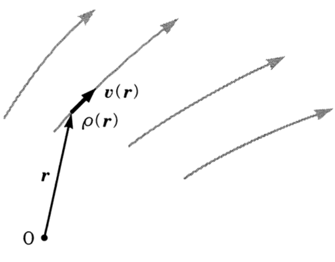


図 2.12

空間内に面（平面でも曲面でもよい）を考え，裏と表を指定する．その面を裏から表に向かって単位時間内に通り抜ける物質の量（流量）をその物質の**流束**という．当然，流束は注目している面の位置や面積や形や向きによって大きさが変る．

流束を扱うには，**流束密度**ベクトルの場を定義すると便利である．イメー

ジしやすいように流れは時間に依存しないものとする．つまり，どの瞬間にも同じような流れが続いている場合を考える．ある点 $\boldsymbol{r}$ に注目して，その点を物理量 Q が密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ で，かつ速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ で流れているとする．このとき，ベクトル場

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \tag{2.46}$$

をその物理量の流束密度の場という．流束密度の次元は

$$[j] = [\rho][v] = [Q]L^{-3}LT^{-1} = [Q]L^{-2}T^{-1} \tag{2.47}$$

である．

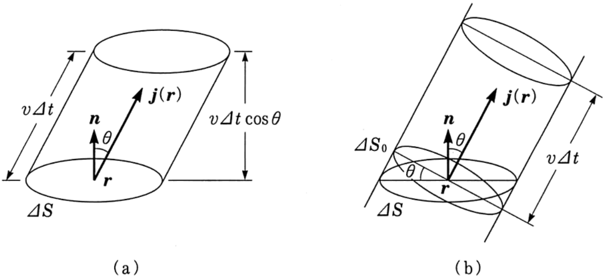


図 2.13

図 2.13(a) のような微小な平面（面素）$\varDelta S$ を単位時間に通り抜ける Q の量，すなわち，**流束** $\varDelta\Phi$ の表式を求めよう．非常に短い時間 $\varDelta t$ の間にこの微小面を通り抜ける Q の量 $\varDelta Q = \varDelta\Phi\varDelta t$ は，$\varDelta S$ を底面として，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ に平行な長さ $v(t)\varDelta t$ の側面をもつ斜めの円柱内に含まれる Q の量に等しい．

$$\varDelta Q = \varDelta\Phi\,\varDelta t \approx \rho(\boldsymbol{r})\varDelta S\,v(\boldsymbol{r})\varDelta t\cos\theta \qquad (\Phi:\ \ ファイ)$$

よって

$$\varDelta\Phi \approx \rho(\boldsymbol{r})\varDelta S\,v(\boldsymbol{r})\cos\theta = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot\varDelta S\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot\varDelta\boldsymbol{S} \tag{2.48}$$

である．$\boldsymbol{n}$ は $\varDelta S$ の**法線ベクトル**（面に垂直で大きさ 1（無次元）のベクトル）で，θ は $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{n}$ の間の角度である．また，

$$\varDelta \boldsymbol{S} = \varDelta S\,\boldsymbol{n} \tag{2.49}$$

は大きさが面積 $\varDelta S$ に等しく法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きをもつベクトルで，**面素ベクトル**という．法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは裏表 2 通り可能なので，その決め方によって $\boldsymbol{j}\cdot\varDelta\boldsymbol{S}$ の符号が変り，したがって $\varDelta\varPhi$ の符号も変る．

次のように考えることもできる．図 2.13(b) のような，$\varDelta S$ の外周に沿って流束密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ に平行に伸ばした側面が $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ に垂直な平面を切り取ってできる微小平面を $\varDelta S_0$ とすると，$\varDelta\varPhi$ は $\varDelta S_0$ を貫く流束 $\varDelta\varPhi_0 = j(\boldsymbol{r})\varDelta S_0$ に等しい．$\varDelta S_0 = \varDelta S\cos\theta$ だから，

$$\varDelta\varPhi = \varDelta\varPhi_0 = j(\boldsymbol{r})\varDelta S\cos\theta = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}\varDelta S = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot\varDelta\boldsymbol{S} \tag{2.50}$$

であることがわかる．

図 2.14 のような任意の大きさの面 S 全体を貫く流束 $\varPhi$ は，その面を細かい区分に分け，面素ベクトル

$$\varDelta\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}_i)\varDelta S_i \tag{2.51}$$

をもつ i 番目の区分の面素を貫く流束

$$\varDelta\varPhi_i = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\varDelta\boldsymbol{S}_i$$

の和の極限をとって

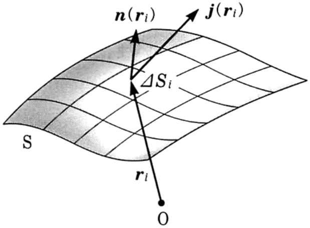


図 2.14

$$\varPhi = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varDelta\varPhi_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\varDelta\boldsymbol{S}_i = \int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.52}$$

で与えられる．

以上では，流れている物質の速度に関係づけて (2.46) で流束密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ を定義したが，その結果得られた流束密度と流束の関係 (2.52) を一般化して，任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を流れの場のようにみなし，それに関連づけられた流束 $\varPhi_A$ を考えることができる．任意の面 S を貫く $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の流束は

$$\Phi_A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{S}_i = \int_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.53}$$

図 2.14 のような縁のある面に対して，球面や卵の殻のように，縁がなく，空間を完全にその外側と内側に分ける面を**閉曲面**という．閉曲面の法線ベクトル，したがって面素ベクトルは，常に外向きにとる．閉曲面 S を貫いて流れ出る $\boldsymbol{A}$ の流束を

$$\Phi_A = \oint_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.54}$$

と表す．$\Phi_A = 0$ なら，正味の流束の出入りがないこと，$\Phi_A < 0$ なら出入りの差し引きで流れ込む流束が大きいことを表す．

例題 2.4

一定の密度 ρ の液体が一様な速度 $\boldsymbol{v}$ で流れている．いま，$\boldsymbol{v}$ の向きに x 軸をもつデカルト座標 (x, y, z) を定めたとき，図 2.15 のような三角形の面 S を原点の側から反対側に単位時間に通り抜ける液量を求めなさい．

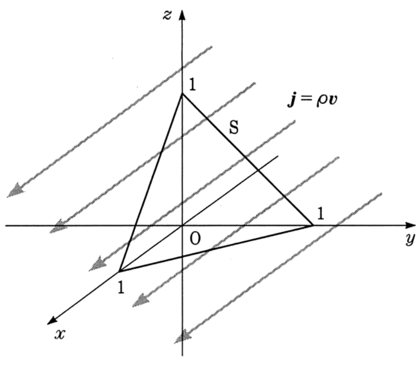


図 2.15

［**解**］　この流れの流束密度ベクトルは一定で

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v} = \rho v(1, 0, 0) \tag{2.55}$$

である．三角形の面の面積 A と，原点と反対側に向かう法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \boldsymbol{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{2.56}$$

である．よって，単位時間当りの流量，すなわち流束は

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = \rho \int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \rho\, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} \int_S dS$$

$$= \rho v\, A(1,0,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\rho v A}{\sqrt{3}} = \frac{\rho v}{2} \qquad (2.57)$$

§2.6　角度と立体角

立体角について理解するために，まず，普通の角度について復習しよう．

角　度

図2.16において**角度** φ（ファイ）は円弧 c と半径 r の比

$$\varphi = \frac{c}{r} \qquad (2.58)$$

である．これから明らかなように φ は

$$\sin\varphi = \frac{a}{r} \quad や \quad \cos\varphi = \frac{b}{r} \qquad (2.59)$$

等と同じく無次元の量である．一般に無次元の量の場合，単位，つまり，どの大きさを1とするかは定義から自ずと明らかである．φ の場合は，$c = r$ のとき $\varphi = 1$ である．これが角度であることを表すために，また，別の大きさの角度をあらためて1とする場合（すぐ後に述べる1°）と区別するために，(2.58) から決めた角度の単位を特に**ラジアン**とよぶ．これはSIで用いられる単位でもある．

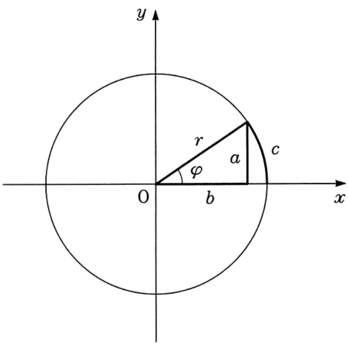


図2.16

$$[\varphi] = [c][r]^{-1} = LL^{-1} = 0(\text{無次元}) \ :\quad \text{rad}(\text{radian} = \textbf{ラジアン}) \qquad (2.60)$$

$c = r$ のとき $\varphi = 1$ である．また，円周全体の角度は

$$\varphi_{\text{円周全体}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \qquad (2.61)$$

である．日常生活では円周全体の 360 分の 1 の角度を 1° とする角度の単位が用いられている．

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}$$

である．

立 体 角

図 2.17 において，球面の一部の面積 $\varDelta S$ と半径の 2 乗との比

$$\varDelta\Omega = \frac{\varDelta S}{r^2} \quad (\Omega：\ オメガ) \quad (2.62)$$

を面積 $\varDelta S$ が原点に対して張る**立体角**という．球面全体が張る立体角は

$$\Omega_{\text{球面全体}} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \qquad (2.63)$$

である．立体角の次元は角度と同じく無次元である．

$$[\Omega] = [S][r]^{-2} = L^2L^{-2}$$
$$= 0(\text{無次元})：$$

sr（steradian ＝ **ステラジアン**）

(2.64)

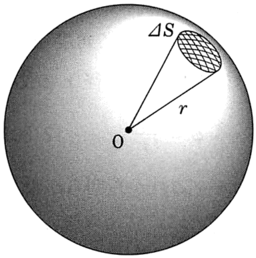


図 2.17

図 2.18 のような，半径 r_1 と r_2 の同心の球面 S_1 と S_2 を考える．S_1 上の部分面 $\varDelta S_1$ の周囲と原点（中心）を結ぶ錐面が，S_2 を切り取る部分面を $\varDelta S_2$ とするとき，$\varDelta S_1$ と $\varDelta S_2$ が原点に対して張る立体角 $\varDelta\Omega_1$ と $\varDelta\Omega_2$

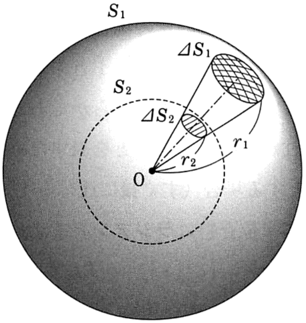


図 2.18

は互いに等しい.

$$\varDelta\Omega_1 = \frac{\varDelta S_1}{{r_1}^2} = \frac{\varDelta S_2}{{r_2}^2} = \varDelta\Omega_2 \tag{2.65}$$

図 2.19 のような，点 $\boldsymbol{r}$ の周りの任意の向きの微小面積 $\varDelta S$ が原点に対して張る立体角 $\varDelta\Omega$ の表式を求めよう. $\varDelta S$ の周囲と原点とを結ぶ錐面が，原点を中心とする半径 r の球を切り取る微小面を $\varDelta S_0$ とすると，

$$\varDelta\Omega = \frac{\varDelta S_0}{r^2} \tag{2.66}$$

である．ところが，図 12.19(b) からわかるように

$$\varDelta S_0 \approx \varDelta S \cos\theta \tag{2.67}$$

だから

$$\varDelta\Omega \approx \frac{\varDelta S \cos\theta}{r^2} = \frac{\varDelta S\, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2} = \frac{\boldsymbol{e}_r\cdot\varDelta\boldsymbol{S}}{r^2} \tag{2.68}$$

である. $\varDelta S \to 0$ のとき $\approx$ は $=$ になる.

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{S}}{r^2} \tag{2.69}$$

ただし，r は原点から微小面までの距離，θ は $\boldsymbol{e}_r$ と微小面の法線 $\boldsymbol{n}$ のなす角

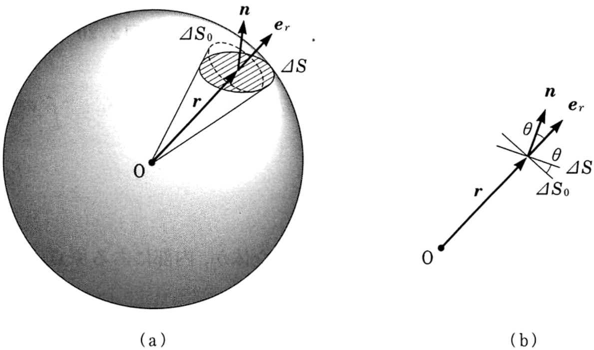


図 2.19

である．なお，$\Delta\Omega$ の符号は一意的でなく，$\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{e}_r$ と同じ側にとれば $\Omega > 0$，反対側にとれば $\Omega < 0$ である．

例題 2.5

地表と月までの距離は約 3.8×10^8 m，月の直径は約 3.5×10^6 m である．月の直径が地球上の1点に対して張る角度を求めなさい．また，地球から見た満月が張る立体角を求めなさい．

［**解**］　直径が張る角度

$$\theta = \frac{3.5 \times 10^6}{3.8 \times 10^8} = 9.2 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad} = 0.53^\circ \tag{2.70}$$

満月が張る立体角

$$\Omega = \frac{\pi(1.75 \times 10^6)^2}{(3.8 \times 10^8)^2} = 6.7 \times 10^{-5}\,\mathrm{sr} \tag{2.71}$$

図2.20のような任意の大きさの曲面S全体が原点に対して張る立体角は，面を細かく分けて各部分の立体角を加え合わせれば求めることができて，

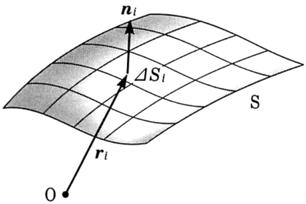


図2.20

$$\Omega = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta\Omega_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta S_i\cos\theta_i}{{r_i}^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\boldsymbol{e}_{r_i}\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i}{{r_i}^2} = \int_{\mathrm{S}}\frac{\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{S}}{r^2} \tag{2.72}$$

である．

図2.21から明らかなように，閉曲面S全体が，内部にある原点に対して張る立体角は

$$\Omega = \oint_{\mathrm{S}}\frac{\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{S}}{r^2} = \oint_{\mathrm{S}} d\Omega = \oint_{\text{球面}} d\Omega = \Omega_{\text{球面全体}} = 4\pi \tag{2.73}$$

である．

閉曲面S全体が，外部にある原点に対して張る立体角は0である．これは次のようにして理解できる．図2.22のように，閉曲面Sの面素のひとつ$\varDelta S_1$がこの閉曲面の外側にある原点に対して張る立体角は

$$\varDelta\Omega_1=\frac{\boldsymbol{e}_{r_1}\cdot\varDelta S_1\boldsymbol{n}_1}{{r_1}^2}=\frac{\boldsymbol{e}_{r_1}\cdot\varDelta\boldsymbol{S}_1}{{r_1}^2} \tag{2.74}$$

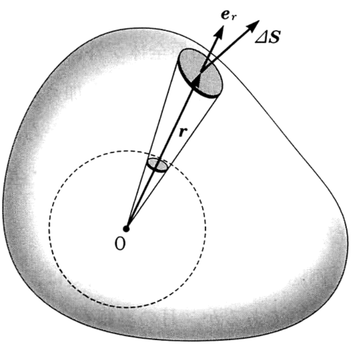


図2.21

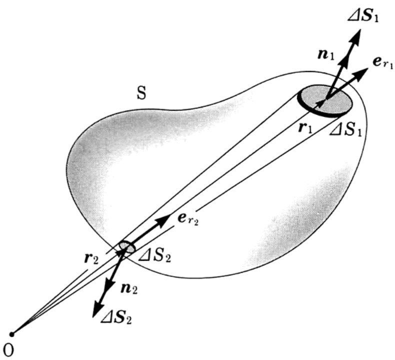


図2.22

である．ただし，r_1は原点からこの部分までの距離である．ところで，$\varDelta S_1$の周囲と原点を結ぶ錐面（あるいはその延長）は必ずこの閉曲面の別の部分を切り取る．その部分の面積を$\varDelta S_2$，法線ベクトルを$\boldsymbol{n}_2$，原点からの距離をr_2とすると，この部分が原点に対して張る立体角は

$$\varDelta\Omega_2=\frac{\boldsymbol{e}_{r_2}\cdot\varDelta S_2\boldsymbol{n}_2}{{r_2}^2}=\frac{\boldsymbol{e}_{r_2}\cdot\varDelta\boldsymbol{S}_2}{{r_2}^2} \tag{2.75}$$

である．明らかに

$$|\varDelta\Omega_1|=|\varDelta\Omega_2| \tag{2.76}$$

であるが，図の場合，$\varDelta\Omega_1>0$，$\varDelta\Omega_2<0$だから，

$$\varDelta\Omega_1 + \varDelta\Omega_2 = 0 \tag{2.77}$$

である．この閉曲面全体が外側にある原点に対して張る立体角は面を細かく分けて各部分の張る立体角を加えればよい．そうすると必ず上のように互いに打ち消し合う部分が存在するから，この和は0になる．つまり

$$\Omega = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\boldsymbol{e}_{r_i}\cdot\varDelta\boldsymbol{S}_i}{r_i^{\,2}} = \oint_{\mathrm{S}}\frac{\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{S}}{r^2} = 0 \tag{2.78}$$

である．

［例題2.5］に関係づけて言えば，満月が地上の一点に対して張る立体角は(2.71)であるが，月の裏側も含めた全表面が張る立体角は0である．

演習問題

［**1**］　関数 $(1+x)^\alpha$，e^x，$\log(1+x)$ のマクローリン級数を第3項まで求めなさい．

［**2**］　辺の長さ a，b の長方形，および半径 a の円の面積をデカルト座標で求めなさい．

［**3**］　辺の長さ a, b, 厚さ t の長方形の板がある．長さ b の辺からの距離が x の点の密度が $\rho(x) = \rho_0 + kx$ であるとき，この板の質量を求めなさい．

［**4**］　ある管の中を一定の密度 ρ の流体が流れている．管に垂直な断面 S_1, S_2 の上で，流体の速度は面に垂直で一定 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ であるとき，v_1 と v_2 の比を求めなさい．

［**5**］　線電荷密度 λ の長さ l の直線状電荷分布がある．その垂直二等分面上での距離 a だけ離れた点の電場の強さを求めなさい．分布が無限に長い場合はどうか．

［**6**］　線電荷密度 λ_1, λ_2 の無限に長い2本の直線状電荷分布が，距離 a だけ離れて平行に存在している．片方の電荷分布が単位長さ当り受けている力を求めなさい．

3 ガウスの法則

前章までで数学的な準備を終り，本章から電磁気現象を本格的に学ぶ．第1章で，点電荷による電場が電荷からの距離の2乗に反比例すること，および電場には重ね合せの原理が成り立つことを学んだが，本章では，そのことの別の形の表現であるガウスの法則を学ぶ．ガウスの法則はマクスウェル方程式のひとつである．この法則には積分形と微分形という二つの表し方があるが，本章では積分形のみを学ぶ．初等的な応用問題のほとんどは積分形で解けるので，これをよく理解することが大切である．マクスウェル方程式の微分形は電磁波の解析などさらに高度の電磁気学を学ぶ上で重要であるが，本書ではその入門的部分のみを付録にまとめた．

§3.1 電束密度・電束・ガウスの法則

点電荷の周りの電場の強さ $\boldsymbol{E}$ は，その近くにもってきた別の点電荷が受ける力から，(1.31)のように書ける．この $\boldsymbol{E}$ に関係が深いが別の概念である**電束密度**を次に定義しよう．点電荷から**電束**とよばれる物理量がわき出しており，その様子は電束密度の場

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = k'\frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r = k'\frac{q\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{3.1}$$

で表現できると想定する．ただし，q の位置を原点とした．ベクトル場 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ を流れの密度の場とみなしているだけだから，実際に何かが流れているわけではないので，電荷が次第に減って無くなってしまうことはない．この電束密度が電荷からの距離の2乗に反比例するとしたのは，もちろん (1.31) を

意識してのことである．一般にこのような距離の 2 乗の反比例関係は，3 次元空間に実際に物理量のわき出しがあってそれが等方的に広がっていくときに見られる自然な関係でもある．たとえば図 3.1 のように，点状の光源から放射された光が途中で減衰しないで広がるときの光源に垂直な単位面積に当たる光量（照度）と光源からの距離との関係が，その例である．

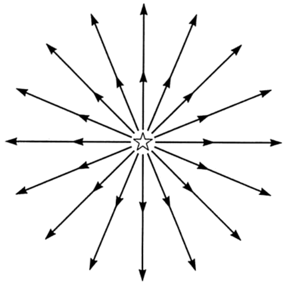


図 3.1

§2.5 で学んだ流束密度と流束の関係から，電束密度が $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ であれば，任意の面 S を貫く**電束**は

$$\Phi_E = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i = \int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (3.2)$$

である．図 3.2 のように閉曲面 S の内側に電荷 q があるとき，S 全体を貫く電束は，q の位置を原点に選ぶ表示で計算すると

$$\oint_{\mathrm{S}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{\mathrm{S}}k'\frac{q}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{S} = k'q\oint_{\mathrm{S}}\frac{\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{S}}{r^2} \qquad (3.3)$$

である．ここでよく見ると，積分の部分は閉曲面の内側の点から見た閉曲面全体の立体角の式 (2.72) と全く同じ形だから，その計算を利用して

$$\oint_{\mathrm{S}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi k'q \qquad (3.4)$$

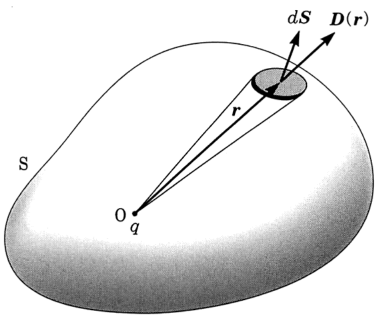


図 3.2

であることがわかる．SI 単位系ではここで

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = q \tag{3.5}$$

となるように係数 k' を決める．それには

$$k' = \frac{1}{4\pi} \tag{3.6}$$

とすればよい．そうすると（3.1）は

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r = \frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi r^3} \tag{3.7}$$

となる．

図 3.3 のように，電荷 q が閉曲面 S の外にあるときに S 全体を貫く電束も，積分 (3.3) で与えられる．よってこの場合も積分の部分は，閉曲面の外の点から見た閉曲面全体の立体角の式 (2.78) と同じ形になるから，その計算を利用して，

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{3.8}$$

であることがわかる．

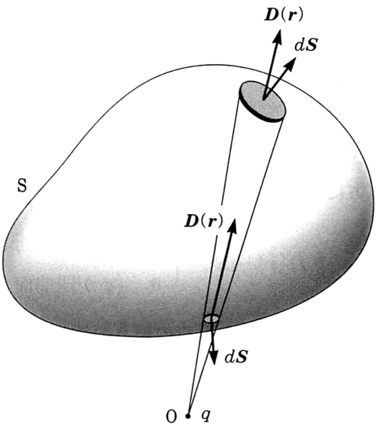


図 3.3

ところで，以上では，原点を電荷 q の位置にとって表現したが，原点を電荷とは別の任意の位置にとると，点 $\boldsymbol{r}_1$ にある電荷 q が点 $\boldsymbol{r}$ に作る電束密度は

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2}\boldsymbol{e}_{r-r_1} = \frac{q(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3} \tag{3.9}$$

である．よって，この電荷から出て任意の閉曲面 S を貫く電束の総量は，

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S \frac{q\,\boldsymbol{e}_{r-r_1}\cdot d\boldsymbol{S}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2} \tag{3.10}$$

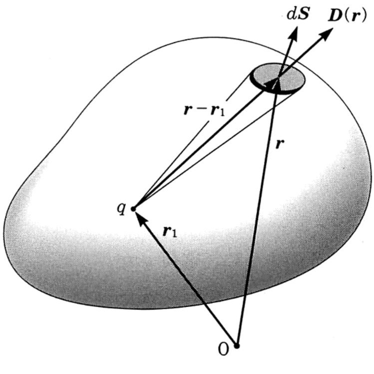


図 3.4

であるが，図 3.2 で原点を変えた図 3.4 から明らかなように，この積分によって加え合わせている量は (3.3) の積分で加え合わせた量と同じである．よって，(3.5) と (3.8) は原点の選び方によらず成り立つ．すなわち

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \begin{cases} q & (q\text{ が閉曲面 S の内部にあるとき}) \\ 0 & (q\text{ が閉曲面 S の外部にあるとき}) \end{cases} \tag{3.11}$$

である．これを点電荷の周りの電束密度に対する**ガウスの法則**という．

なお，電束密度の次元と SI 単位は

$$[D] = QL^{-2}:\quad \mathrm{C/m^2} \tag{3.12}$$

である．

§ 3.2　真空の誘電率と電場の強さ

実験より電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が (1.31) で表されることがわかっており，これと比例するように電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ を (3.1) で定義したので，比例係数 ε_0 を導入して

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \qquad (\varepsilon：\ イプシロン) \tag{3.13}$$

と置くことができる．われわれはさらに，係数 k' を決めて(3.7)とした．そこで，(1.31) と (3.7) を (3.13) に代入すると

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{3.14}$$

である．よって，点電荷の周りの電場の強さを ε_0 を用いて表すと

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r = \frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{3.15}$$

である．ε_0 を**真空の誘電率**という．その次元と SI 単位は

$$[\varepsilon_0] = Q^2L^{-2}[F]^{-1} = Q^2T^2M^{-1}L^{-3}：\quad \mathrm{C^2/m^2{\cdot}N = C^2{\cdot}s^2/kg{\cdot}m^3} \tag{3.16}$$

である．また，実験から定められているその値は

$$\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/m^2{\cdot}N} \tag{3.17}$$

である．なお，ε_0 の SI 単位は，後で学ぶ静電容量の単位 F（ファラッド）を用いて F/m と書くこともできる（§5.7）．

(1.33) と (1.36) を ε_0 を用いて表しておこう．まず，点 $\boldsymbol{r}_1$ に電荷 q_1 があるときの点 $\boldsymbol{r}$ の電場は，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2}\boldsymbol{e}_{r-r_1} = \frac{q_1(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3} \tag{3.18}$$

となる．また，実験によると，2 個以上の電荷 q_1，q_2，…，q_n が $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，…，$\boldsymbol{r}_n$ にあるとき，$\boldsymbol{r}$ にできる電場は，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^2}\boldsymbol{e}_{r-r_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \tag{3.19}$$

で表される．

§3.3　重ね合せの原理とガウスの法則

(3.13) と (3.19) より当然，電束密度の場 $\boldsymbol{D}$ にも電場の強さの場 $\boldsymbol{E}$ と同

じ重ね合せの原理が成り立つ．点電荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ が $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ にあるとき，点 $\boldsymbol{r}$ の電束密度は

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^2}\boldsymbol{e}_{r-r_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \tag{3.20}$$

である．また，閉曲面Sを貫く電束について，ガウスの法則

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} \oint_S \frac{q_i \boldsymbol{e}_{r-r_i}\cdot d\boldsymbol{S}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^2} = \sum_{i(\text{S内})} q_i = q_{\text{内部}} \tag{3.21}$$

が成り立つ．$q_{\text{内部}}$ は，閉曲面Sの内部に含まれる電荷の総量を表す．

(3.13) からもちろん

$$\oint_S \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \sum_{i(\text{S内})} \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{q_{\text{内部}}}{\varepsilon_0} \tag{3.22}$$

である．ただし，(3.21) は物質を含む場合にも成り立つのに対し，(3.22) は真空中でなければ成り立たない．

§3.4　粗視化による連続体近似

19世紀末以来の諸実験やその後に発展した量子力学によって，われわれは，実在の物質は原子粒子からなり，原子はさらに原子核と電子という粒子から成り立っていることを知っている．しかし，巨視的（マクロ）なスケールで見ると，そのような粒子は小さすぎて認識することができず，物質はいくらでも細かく分割することのできる連続的な実体のように見える．マクロな電磁気学は，物質や電荷の分布をそのような連続的な実体として扱う．

物質が原子からなることを知るわれわれとしては，電荷密度を連続体として扱うための方法を確立しなければならない．その手続きを**粗視化**という．物質の誘電的性質や磁気的性質を扱う際には，電気双極子モーメントや磁気モーメントの粗視化が重要になるので，その理解のためにも，ここでの電荷密度の粗視化について考え方をよく理解しておくことが必要である．

いま，正の電荷をもつ粒子の集合体を考える．粒子間の距離は実在の物質

の原子間の距離の程度であるとする．この集合体に対して，ある点 $\boldsymbol{r}$ の電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を (2.32) によって定めようとすると，右辺は $\varDelta V \to 0$ の極限操作の途中で，図 3.5 に模式的に描いてあるように，一度一定値に達した後，振動し始める．$\varDelta V$ が小さくなると，粒子が

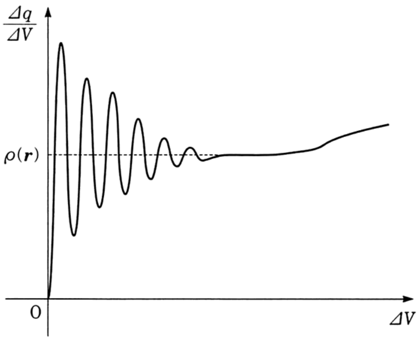


図 3.5

1 個ずつ $\varDelta V$ の範囲から外れていくときの不連続な変化が目立ってくるからである．しかも最終的な極限値は，$\boldsymbol{r}$ が粒子の位置か粒子の間の空間の一点かで大きく異なる．（図 3.5 は $\boldsymbol{r}$ には荷電粒子がない場合を描いてある．）

$$\lim_{\varDelta V \to 0} \frac{\varDelta q}{\varDelta V}\bigg|_{\text{粒子上}} \neq \lim_{\varDelta V \to 0} \frac{\varDelta q}{\varDelta V}\bigg|_{\text{粒子外}} = 0 \qquad (3.23)$$

これでは極限をとった目的に合わないから，$\varDelta V \to 0$ の途中で得られる安定した値を，その点の電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ とする．通常の物質では大体 $\varDelta V \approx 10^{-21}$ m^3，すなわち，半径 10^{-7} m 程度の球で，10^8 個程度の原子を含んだ領域を考えればよいであろう．これを**マクロな微小領域**とよぶ．このような操作を $\boldsymbol{r}$ を連続的にずらしながら行えば，$\boldsymbol{r}$ が粒子の上にあるかどうかにかかわらず $\rho(\boldsymbol{r})$ を連続的な関数で表すことができる．このように，極限操作の途中でやめてなめらかな場（3 次元空間の連続関数）を作る手続きが粗視化である．

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varDelta V \to 0} \frac{q}{\varDelta V} \qquad \text{（粗視化の意味で）} \qquad (3.24)$$

粗視化した物体は連続体として扱える．したがって，粗視化した電荷分布中の微小体積 $\varDelta V$（または無限小体積 dV）中に含まれる電荷の量は

$$\varDelta q \approx \rho(\boldsymbol{r})\varDelta V, \qquad dq = \rho(\boldsymbol{r})\,dV \tag{3.25}$$

である．よって，任意の領域 V 中の電荷は

$$q = \int_{\mathrm{V}} dq = \int_{\mathrm{V}} \rho(\boldsymbol{r})\ dV \tag{3.26}$$

で与えられることになる．

なお，以上では 1 種類の電荷の分布の粗視化を考えたが，通常の物体は，外から帯電させない限り原子核が担う正の電荷と電子が担う負の電荷が等量存在する．よって，帯電しておらず，また後に学ぶ導体の静電誘導のように，マクロなスケールで電荷分布の偏りが起こっていない限り，正負の電荷を同時に粗視化すると，すべての位置で $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ になる．また，別々に粗視化して重ね合わせても 0 になる．

§ 3.5　連続的電荷分布の周りの $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{E}$ とガウスの法則

図 3.6 のように，領域 V の中に粗視化した電荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ があるとする．点 $\boldsymbol{r}'$ の周りの微小体積 $\varDelta V'$ 内には $\rho(\boldsymbol{r}')\varDelta V'$ の電荷が含まれるから，それが点 $\boldsymbol{r}$ に作る電束密度と電場の強さは

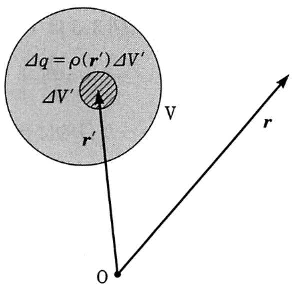


図 3.6

$$\left.\begin{aligned}\varDelta \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) &\approx \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\varDelta V'}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\,\boldsymbol{e}_{r-r'} \\ \varDelta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &\approx \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\varDelta V'}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\,\boldsymbol{e}_{r-r'}\end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

である．よって，領域 V 内のすべての電荷が点 $\boldsymbol{r}$ に作る場は，体積を細かく分けてそれぞれの寄与を加え合わせればよいから，(3.19) と (3.20) を参照して

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathrm{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\,dV' = \int_{\mathrm{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,dV' \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathrm{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\,dV' = \int_{\mathrm{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,dV' \tag{3.29}$$

である．面積 S 上に面密度 $\sigma(\boldsymbol{r})$ で分布しているすべての電荷が点 $\boldsymbol{r}$ に作る電場や，曲線 l 上に線密度 $\lambda(\boldsymbol{r})$ で分布しているすべての電荷が点 $\boldsymbol{r}$ に作る電場も同様に次式で与えられる．

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathrm{S}} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}dS' = \int_{\mathrm{S}} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dS' \tag{3.30}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathrm{S}} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}dS' = \int_{\mathrm{S}} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dS' \tag{3.31}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int_{l} \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}dl' = \int_{l} \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dl' \tag{3.32}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int_{l} \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}dl' = \int_{l} \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dl' \tag{3.33}$$

連続電荷分布があるときのガウスの法則は

$$\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{V}} \rho(\boldsymbol{r})\,dV \tag{3.34}$$

である．右辺は (3.26) で示した体積 V 内に含まれる電荷の総量を表す．点電荷と連続電荷分布が両方存在するときには，δ 関数という特殊な関数を用いて表現することもできるが，ここでは意味を重視して（3.21）と同じ形で

$$\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = q_{\text{内部}} \tag{3.35}$$

と書いておく．$q_{\text{内部}}$ は閉曲面Sの内部に含まれる電荷（点電荷および連続的に分布した電荷）の総量である．ガウスの法則は，本書で順次学んでいく4個の**マクスウエル方程式**の第1の法則である．（マクスウェル方程式の並べ方に順序があるわけではない．本書では登場順に第2，第3，… とよぶことにする．）

§3.6　極座標と円筒座標（円柱座標）

ここで，空間内の点を表す座標系として極座標と円筒座標を紹介しよう．本書では，これを用いてむずかしい計算をするわけではない．ガウスの法則を利用すると電場を簡単に計算することができるが，それができるのは電荷

分布の対称性がよい場合に限られる．そして，電荷分布が球対称のときは 3 次元の極座標，軸対称のときは円筒座標を用いると表示や計算が簡単なので，利用しようというわけである．

デカルト座標系では単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ はすべての点で同じ向きを向いているが，以下の説明から明らかなように，極座標や円筒座標の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\xi$，$\boldsymbol{e}_\varphi$，$\boldsymbol{e}_\theta$ 等は，点の位置が異なると向きが異なる．

2 次元極座標

図 3.7 のように，2 次元デカルト座標 (x, y) との関係が

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.36}$$

であるような座標系 (r, φ) を **2 次元極座標**という．r（**動径**）方向と φ（**偏角**または**方位角**）方向の単位ベクトルは図に示すとおりである．

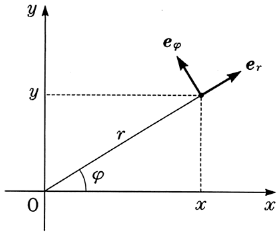


図 3.7

なお，平面上の面積分は，dS として図 3.8 のような，dr と方位角の微小変化 $d\varphi$ に対応する長さの変化 $r\,d\varphi$ を 2 辺とする無限小長方形（無限小の極限でのみ真の長方形）を考え，$dS = dr \times r\,d\varphi = r\,dr\,d\varphi$ として

$$\int_S f(\boldsymbol{r})\,dS = \iint_S f(r, \varphi)\,r\,dr\,d\varphi \tag{3.37}$$

と書くことができる．ただし，極座標による計算が便利なのは，この二重積分を r 方向，φ 方向に沿って順次計算する（順序はどちらが先でもよい）ことが可能な場合に限られる．

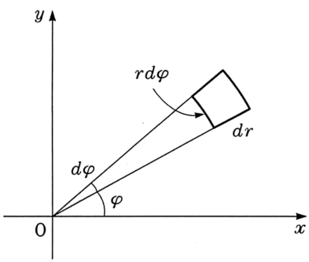


図 3.8

例題 3.1

半径 a の円の面積 A を極座標で計算しなさい．

［解］

$$A = \int_{\text{半径 } a \text{ の円}} dS = \iint_{\text{半径 } a \text{ の円}} r\,dr\,d\varphi = \int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}a^2 \times 2\pi = \pi a^2$$

3 次元極座標

図 3.9 のように，3 次元デカルト座標（x, y, x）との関係が

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

であるような座標系（r, θ, φ）を **3 次元極座標**という．r（動径）方向，θ（**天頂角**）方向，φ（方位角）方向の単位ベクトルは図に示すとおりである．

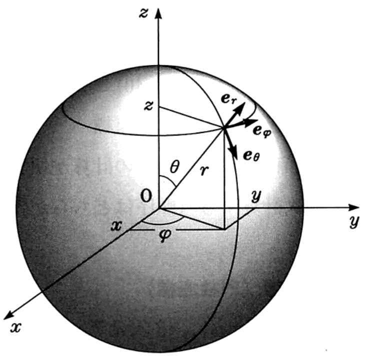


図 3.9

半径 r の球面上の面積分は，dS として図 3.10 のような，天頂角の微小変化 $d\theta$ に対応する長さの変化 $r\,d\theta$ と方位角の微小変化 $d\varphi$ に対応する長さの変化 $r\sin\theta\,d\varphi$ を 2 辺とする無限小長方形（球面の一部であり，無限小の極限でのみ正確な長方形）を考えることにより，その面積 $dS = r\sin\theta\,d\theta \times r\,d\varphi$ を用いて

$$\int_{\mathrm{S}} f(\boldsymbol{r})\,dS = \iint_{\mathrm{S}} f(r, \theta, \varphi)\,r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{3.39}$$

と書くことができる．

また，体積積分は，同じく図 3.10 に示すように，上記 dS を底面積，高さを dr とする無限小な直方体を考え，

$$dV = r\sin\theta\,d\theta \times r\,d\varphi \times dr = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$ として

$$\int_V f(r)\,dV = \iiint_V f(r, \theta, \varphi)\,r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi \tag{3.40}$$

と書くことができる．極座標による面積分や体積積分の計算が便利なのは，r 方向，$d\theta$ 方向，φ 方向に沿って順次計算する（順序はどちらが先でもよい）ことが可能な場合に限られる．

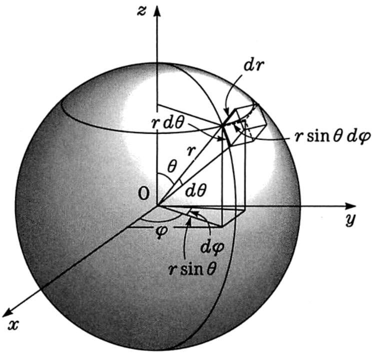


図 3.10

円筒座標（円柱座標）

図 3.11 のように，3 次元デカルト座標（x, y, z）との関係が

$$x = \xi\cos\varphi, \quad y = \xi\sin\varphi, \quad z = z, \quad \xi = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\xi：クシー) \tag{3.41}$$

であるような座標系 (ξ, φ, z) を**円筒座標**または**円柱座標**という．ξ 方向，φ 方向，z 方向の単位ベクトルは図に示すとおりである．（円筒座標での積分の表示については章末の演習問題［3］参照．）

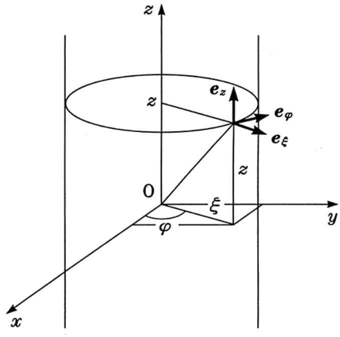


図 3.11

例題 3.2

デカルト座標の点 $(1, 1, \sqrt{2})$ を極座標と円筒座標で表しなさい．（図 3.12）

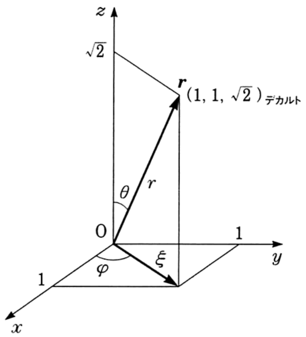


図 3.12

［**解**］ 極座標：

$$r = \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4} = 2 \tag{3.42}$$

注目する点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z$ のスカラー積から

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_z}{r} = \frac{(1, 1, \sqrt{2})\cdot(0, 0, 1)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow\ \theta = \frac{\pi}{4} \tag{3.43}$$

また，明らかに

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \text{よって} \quad \left(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.44}$$

円筒座標：

$$\xi = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \text{よって} \quad \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right) \tag{3.45}$$

§3.7 ガウスの法則の応用

ガウスの法則は積分法則だから，各点の電場を直接計算するのには役立たない．しかし，対称性のよい場の場合は，そしてその場合に限り，電場の計算に用いることができる．これは，対称性を考慮して適当に選んだ面の上での積分を積に置き換えることができるからである．

［例1］ 球対称の電荷分布 $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\rho}(r)$ の周りの電場（図3.13）

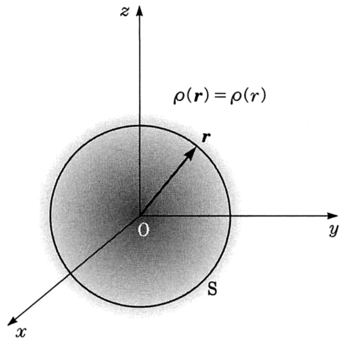


図3.13

任意の点 $\boldsymbol{r}$ における電束密度を，球の中心を原点とする極座標 (r, θ, φ) で考える．電場の原因となっている電荷分布は点 $\boldsymbol{r}$ と原点を結ぶ直線の周りの回転に対して対称だから，結果としてできる電場は動径成分しかもつことができない．よって，$D_r(\boldsymbol{r}) = D(r)$ と書くと，

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(r)\,\boldsymbol{e}_r \tag{3.46}$$

と書ける．半径 r の球の表面を S とすると，ガウスの法則から

$$\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = q_{\text{内部}} \tag{3.47}$$

であるが，左辺は(3.46)より

$$\text{左辺} = \oint_{\mathrm{S}} D(r)\,\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_r\, dS = D(r) \oint_{\mathrm{S}} dS = 4\pi r^2 D(r) \tag{3.48}$$

である．よって，

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{q_{\text{内部}}}{4\pi r^2}\,\boldsymbol{e}_r, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q_{\text{内部}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\boldsymbol{e}_r \tag{3.49}$$

である．

このように，球対称の電荷分布の周りの電場は，注目している点 $\boldsymbol{r}$ の内側の電荷が中心に集中したときの電場に等しい．外側の空間の電荷はその点の電場には寄与しない（効果が打ち消し合ってゼロになる）．このことが結論づけられるためには，出発点の上記下線部分の前提が極めて重要であることに注意する．たとえば，図3.14のように球対称の電荷分布を立方体の形に切り

取ってその外では $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ あるいは他の任意の分布にしてしまうとこの前提が成り立たず，(3.46)がいたるところ成り立つといえなくなるから，(3.48)のように計算することができなくなる．

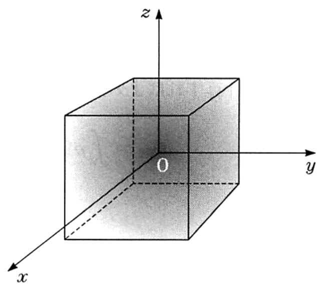


図3.14

話を球対称の場合にもどすと，$\rho(r)$ の関数形がわかっている場合には，$q_{内部}$ を

$$q_{内部} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\, dV$$
$$= \int_V \rho(r')\, 4\pi r'^2\, dr' = 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' \qquad (3.50)$$

から具体的に計算することができる．

例題 3.3

図3.15のように半径 a の球内に一様な密度 ρ で分布した電荷の周りの電場を求め，ρ および全電荷 q を用いて表しなさい．また，電場の強さを中心からの距離の関数としてグラフに表しなさい．

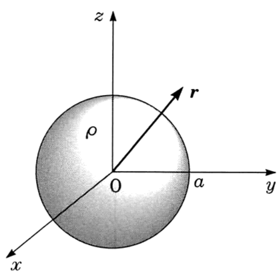


図3.15

［解］　全電荷は

$$q = \frac{4\pi a^3}{3}\rho \qquad (3.51)$$

である．電荷分布は対称だから $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ は動径成分以外の成分をもつことができず，

(3.46)が成り立つ．任意の半径 r の球の表面をSとすると，ガウスの法則(3.34)の左辺は(3.48)で与えられる．よって，電束密度は(3.49)で与えられるので，あとは $q_{内部}$ を計算すればよい．

$$q_{内部} = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) \cdot dV, \qquad \rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \rho & r \leqq a \\ 0 & r > a \end{cases} \tag{3.52}$$

であるから，

$$r \leqq a のとき \quad q_{内部} = \frac{4\pi r^3}{3}\rho \quad だから \quad D(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{4\pi r^3}{3}\rho = \frac{r}{3}\rho = \frac{qr}{4\pi a^3} \tag{3.53}$$

である．したがって

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho}{3} r\,\boldsymbol{e}_r = \frac{qr}{4\pi a^3}\boldsymbol{e}_r, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\boldsymbol{e}_r = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\boldsymbol{e}_r \tag{3.54}$$

である．また

$$r \geqq a のとき \quad q_{内部} = \frac{4\pi r^3}{3}\rho = q \quad だから \quad D(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{4\pi a^3}{3}\rho = \frac{a^3\rho}{3r^2} = \frac{q}{4\pi r^2} \tag{3.55}$$

である．したがって

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{a^3\rho}{3r^2}\boldsymbol{e}_r = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{3.56}$$

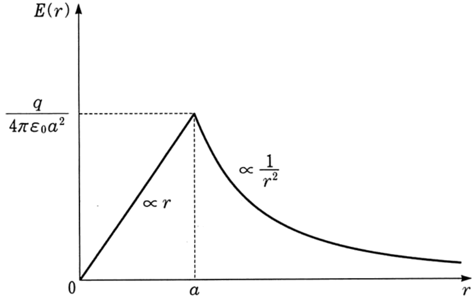


図3.16

である.

図 3.16 に $E(\boldsymbol{r})$ を r の関数として描いて示す. $r \geqq a$ では, 電荷 q がすべて中心に集中したときの電場に等しい.

[例 2]　無限に広い平面上に一定の面密度 σ で分布している電荷の周りの電場

図 3.17 のように面内に x, y 軸をとり, 垂直に z 軸をもつデカルト座標で考える. 電荷分布は, $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ を通り xy 面に垂直な任意の面について対称だから

$$D_x = D_y = 0 \tag{3.57}$$

であり, よって, $D_z(\boldsymbol{r}) = D(z)$ と書くと,

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(z)\,\boldsymbol{e}_z \qquad (x, y \text{ に依存しない}) \tag{3.58}$$

である. また

$$D(-z) = -D(z) \tag{3.59}$$

である. 以上を確認すると以下の計算が可能になる. $\boldsymbol{r}$ を通り平面に垂直な軸をもつ底面積 A, 高さ $2z$ の, 面を貫く円筒を考えると, ガウスの法則から

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = q_{\text{内部}} \tag{3.60}$$

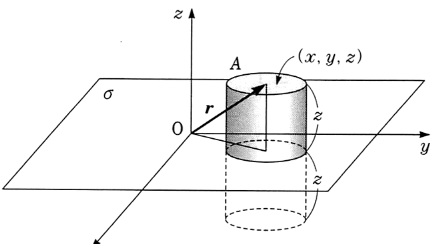


図 3.17

である．

$$\text{左辺} = \int_{\text{上底}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\text{側面}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\text{下底}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.61}$$

であるが，側面では $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \perp d\boldsymbol{S}$ だから

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{3.62}$$

で，上底では

$$\int_{\text{上底}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{上底}} D(z)\, \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z \, dS = D(z) \int_{\text{上底}} dS = AD(z) \tag{3.63}$$

下底では

$$\int_{\text{下底}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\text{下底}} D(-z)\, \boldsymbol{e}_z \cdot (-\boldsymbol{e}_z)\, dS = D(z) \int_{\text{下底}} dS = AD(z) \tag{3.64}$$

だから

$$\text{左辺} = 2AD(z) \tag{3.65}$$

である．

一方，$q_{\text{内部}}$ はこの円筒で切り取られる平面に含まれる電荷だから，

$$\text{右辺} = A\sigma \tag{3.66}$$

である．よって

$$2AD(z) = A\sigma \to D(z) = \frac{\sigma}{2} \tag{3.67}$$

である．これは z に依存しない．よって

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2} \boldsymbol{e}_z & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2} \boldsymbol{e}_z & z < 0 \end{cases} \tag{3.68}$$

である．また

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \boldsymbol{e}_z & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \boldsymbol{e}_z & z < 0 \end{cases} \tag{3.69}$$

である．

例題 3.4

図3.18のような無限に長い直線上に一様な線密度λで分布した電荷の周りの電場を求めなさい．

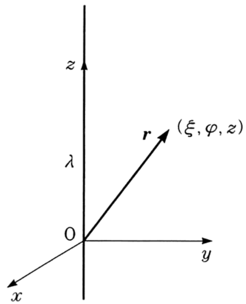


図3.18

［**解**］ この直線をz軸とするような円筒座標(ξ, φ, z)で考える．$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$は点$\boldsymbol{r}$と$z$軸を含む面内にあるはずだから$D_\varphi = 0$である．また，直線は無限に長いから，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$は点$\boldsymbol{r}$を通り$z$軸に垂直な面内にあるはずであり，$D_z = 0$である．したがって

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(\xi)\,\boldsymbol{e}_\xi \tag{3.70}$$

であることがわかる．点$\boldsymbol{r}$を側面上にもつ，半径ξ，長さlの円筒を考える．ガウスの法則

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = q_{\text{内部}} \tag{3.71}$$

の

$$\text{左辺} = \int_{\text{上底}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\text{側面}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\text{下底}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.72}$$

であるが，上底・下底では$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \perp d\boldsymbol{S}$だから

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{3.73}$$

であり，側面では

$$\int_{側面} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{側面} D(\xi)\, \boldsymbol{e}_\xi \cdot \boldsymbol{e}_\xi \, dS = \int_{側面} D(\xi)\, dS$$

$$= D(\xi) \int_{側面} dS = 2\pi \xi\, l\, D(\xi) \tag{3.74}$$

だから

$$左辺 = 2\pi \xi\, l\, D(\xi) \tag{3.75}$$

である．

一方，右辺の $q_{内部}$ はこの円筒で切り取られる直線の部分に含まれる電荷だから，

$$右辺 = \lambda l \tag{3.76}$$

である．よって

$$2\pi \xi\, l\, D(\xi) = \lambda l \;\rightarrow\; D(\xi) = \frac{\lambda}{2\pi\xi} \tag{3.77}$$

より

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\xi}\boldsymbol{e}_\xi \qquad また \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\xi}\boldsymbol{e}_\xi \tag{3.78}$$

である．

演習問題

［**1**］　質量数 A の原子核の半径は $R_0 = 1.1 \times 10^{-15} A^{1/3}\,\mathrm{m}$ で近似できる．アルミニウム原子核（原子番号 $Z = 13$，$A = 27$）の半径 R_0 を求めなさい．また，電荷は球対称に分布しているとして，中心から $2R_0$ の位置の電場を求めなさい．ただし，電気素量は $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ である．

［**2**］　半径 a の球の表面積と体積を極座標を用いて計算しなさい．

［**3**］　半径 ξ の円柱の側面上の面積分を円筒座標で表示しなさい．また，円筒座標での体積積分の表示を求めなさい．

［**4**］　半径 a の細い円環に一様な線密度 λ で分布した電荷の中心軸上高さ z の点の電場の向きと大きさを求めなさい．

[5] 半径 a の薄い円板上に一様な面密度 σ で分布した電荷の中心軸上高さ z の点の電場の向きと大きさを求めなさい.

[6] 半径 a の球殻上に一定の面密度 σ で分布した電荷の周りの電場を求めなさい.

[7] 内半径 a_1, 外半径 a_2, すなわち厚さ $a_2 - a_1$ の球殻内に一様な密度 ρ で分布した電荷の周りの電場を求めなさい.

[8] 半径 a の無限に長い円柱内に一様な密度 ρ で分布した電荷の周りの電場を求めなさい.

[9] 半径 a の無限に長い薄い円筒に一様な面密度 σ で分布した電荷の周りの電場を求めなさい.

[10] 半径 a と $b(> a)$ で同じ長さ $L(\gg b)$ の長く薄い同軸の円筒にそれぞれ電荷 q と $-q$ が一様な面密度で分布しているとき, 円筒の近くで両端からは離れた部分の電場を求めなさい.

[11] 一様な面密度 σ で帯電した半径 a の薄い円板がある.

（a） この円板の中心付近（表と裏）の電場を求めなさい.

（b） この円板の中心から離れた点の付近の電場について, ガウスの法則から何か言えることがあるか.

4 静電場と電位

ベクトル場の一種に保存場とよばれる場がある．電荷が作る静電場（クーロン場）はその例である．同じ電場でも，第9章で学ぶ磁場の変化が原因で作られる誘導電場は保存場でない．静電場が保存場であることから，電場と重なって存在する静電ポテンシャルというスカラー場を定義することができる．スカラー場はベクトル場より取扱いが簡単なので，静電ポテンシャルは電場を計算するときの便利な手段になる．

電場が保存場であることを表す方程式もマクスウェル方程式のひとつである．それは，誘導電場の性質を含むより一般的な方程式（第9章）を，静電場だけに対して適用したものに相当する．ここではその積分形を学ぶ．

本章ではまた，ガウスの法則からは計算できない，双極子モーメントの周りの電場とその静電ポテンシャルについても学ぶ．

§4.1 静電ポテンシャル

保存場

一般に，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の図4.1のような経路Cに沿っての線積分

$$\int_{\substack{\boldsymbol{r}_0 \\ (\mathrm{C})}}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \qquad (4.1)$$

が，経路によらないとき，すなわち，図4.2(a)のような任意の2つの経路

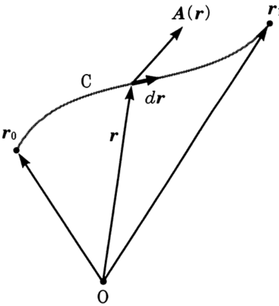


図4.1

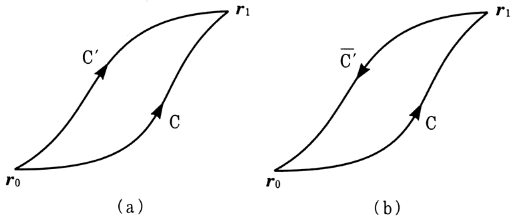


図4.2

C, C′ に対して

$$\int_{r_0\,(\mathrm{C})}^{r_1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_0\,(\mathrm{C}')}^{r_1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.2}$$

のとき，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を**保存場**という．このとき

$$\int_{r_0\,(\mathrm{C})}^{r_1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} - \int_{r_0\,(\mathrm{C}')}^{r_1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_0\,(\mathrm{C})}^{r_1} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{r_1\,(\overline{\mathrm{C}'})}^{r_0} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{4.3}$$

より

$$\oint_{\mathrm{C}+\overline{\mathrm{C}'}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{4.4}$$

である．ただし，図 4.2(b) のように C′ を逆向きにたどることを $\overline{\mathrm{C}'}$ で表した．C や C′ は任意に選んだ経路だから，

$$\oint_{\text{任意の閉曲線}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{4.5}$$

である．左辺の積分を $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の**循環**という．

静電場（クーロン場）は保存場である

［証明］　図 4.3 のように電荷 q が原点にあるとき，その周りの電場の強さは

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\boldsymbol{e}_r \tag{4.6}$$

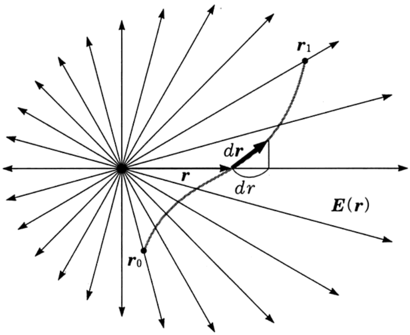


図 4.3

であるから，

$$\int_{r_0 \,(\mathrm{C})}^{r_1} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_0 \,(\mathrm{C})}^{r_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \boldsymbol{e}_r \cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.7}$$

であるが，図に示すように

$$\boldsymbol{e}_r \cdot d\boldsymbol{r} = dr \quad (= d\boldsymbol{r} \text{ の } r \text{ 方向成分}) \tag{4.8}$$

であるから

$$\int_{r_0 \,(\mathrm{C})}^{r_1} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_0 \,(\mathrm{C})}^{r_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^2}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \bigg|_{r_0}^{r_1} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \tag{4.9}$$

である．これは始点と終点の座標の r 成分のみに依存するから，途中の経路には依存しない．したがって(4.6)は保存場である．任意の静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は，(3.19)のようにクーロン場の重ね合せで表せるから，保存場である．つまり

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{4.10}$$

である．これは 2 番目の**マクスウェル方程式**（積分形）の，静電場しか存在しないときの表式である．誘導電場を含む完全な方程式は

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \quad (S \text{ は } l \text{ を外周とする任意の面}) \tag{4.11}$$

である．これについては第9章で学ぶ．

静電ポテンシャル

上に示したように，静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は保存場だから，任意の点 $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}$ までの積分

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \qquad (\phi: \quad \text{ファイ}) \tag{4.12}$$

は経路に依存しない．（よって経路Cは明示しない．）これを電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の $\boldsymbol{r}_0$ を基準とする**静電ポテンシャル**という．負号をつける理由については次節で明らかになる．

原点に q があるとき，周りの静電ポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{r_0}^{r} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{4.13}$$

である．特に $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ とすると

$$\phi(\boldsymbol{r}_0) = -\int_{r_0}^{r_0} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{4.14}$$

である．これが，$\boldsymbol{r}_0$ が基準という意味である．無限遠 $r_0 \to \infty$ を基準にとると

$$\frac{1}{r_0} \to 0$$

だから

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{4.15}$$

となる．普通はこのように基準を選ぶ．図1.10のように電荷 q_1 が原点ではなく点 $\boldsymbol{r}_1$ にあるとき，点 $\boldsymbol{r}$ の静電ポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} \tag{4.16}$$

である．また，多数の電荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ が位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ にあるときの点 $\boldsymbol{r}$ の静電ポテンシャルは，重ね合せの原理より

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|} \tag{4.17}$$

である.

以上は点電荷の場合であるが，図 4.4 のような連続的な電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ による静電ポテンシャルは，点 $\boldsymbol{r}'$ の周りの微小体積 $\Delta V'$ 内にある電荷 $\rho(\boldsymbol{r}')\Delta V'$ が作る静電ポテンシャルをすべて重ね合わせればよいから，積分を用いて,

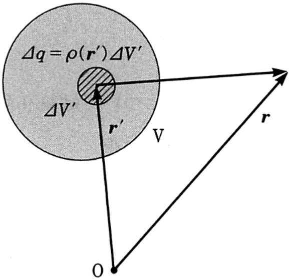


図 4.4

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,dV'}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{4.18}$$

である. 面 S 上に面電荷密度 $\sigma(\boldsymbol{r})$ で分布している電荷や, 曲線 l 上に線電荷密度 $\lambda(\boldsymbol{r})$ で分布している電荷による静電ポテンシャルも同様にして

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_S \frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\,dS'}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{4.19}$$

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_l \frac{\lambda(\boldsymbol{r}')\,dl'}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{4.20}$$

で与えられる. 静電ポテンシャルはスカラー量なので, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ より計算が容易である.

静電ポテンシャルの次元と SI 単位は

$[\phi] = [E]L = MLT^{-2}Q^{-1}L = ML^2T^{-2}Q^{-1}$:

$$\mathrm{kg \cdot m^2/s^2 \cdot C = V = volt}\,(\text{ボルト}) \tag{4.21}$$

である. 静電ポテンシャルは応用上重要な量なので, このように特別な単位 V が与えられている. これを用いると電場の強さ E の SI 単位は V/m である.

電 位 差

静電ポテンシャルは**電位**ともいう. 点 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ の静電ポテンシャルの差

$$\phi(\boldsymbol{r}') - \phi(\boldsymbol{r}) = -\int_{r_0}^{r'} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} - \left(-\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}\right) = -\int_{r}^{r'} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.22}$$

を**電位差**という．これは，点 $\boldsymbol{r}$ を基準とする点 $\boldsymbol{r}'$ の静電ポテンシャルでもある．

§4.2　ポテンシャルエネルギー

図 4.5(a) のように，点 $\boldsymbol{r}$ にある電荷 q が基準点 $\boldsymbol{r}_0$ まで移動するときに $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ がする仕事

$$U(\boldsymbol{r}) = q\int_{r}^{r_0} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -q\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = q\,\phi(\boldsymbol{r}) \tag{4.23}$$

を，$\boldsymbol{r}$ にある q がもつ**ポテンシャルエネルギー**という．(4.12)の定義に負号がついていたのは，$U(\boldsymbol{r})$ と $q\,\phi(\boldsymbol{r})$ がこのように同じ符号になるように準備したものである．ポテンシャルには「潜在的な」という意味があり，移動前にエネルギーを潜在的にもっていたので仕事ができたと考える．ただし，力学で学ぶように，電場の中の任意の点 $\boldsymbol{r}$ にある点電荷 q を任意の経路をたどって点 $\boldsymbol{r}_0$ にもって来るには，静電気力以外の力を加えて誘導する必要がある．(4.23) はその余分な力のことは無視して，静電気力 $q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ がする仕事のみをとりだしたものが $U(\boldsymbol{r})$ に等しいという意味である．逆に図 4.5(b) のように，$q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に抗する静電気力以外の力を使って，電荷 q を基準点 $\boldsymbol{r}_0$

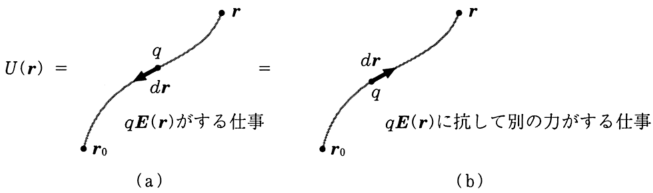


図 4.5

から $\boldsymbol{r}$ まで，つり合いを保ちつつ十分ゆっくりと移動させるのに必要な仕事が $U(\boldsymbol{r})$ であると言ってもよい．

ポテンシャルエネルギーの次元と SI 単位は

$$[U] = Q[E]L = [F]L = ML^2T^{-1} = [\text{エネルギー}] :$$

$$\mathrm{J} = \mathrm{joule}(\textbf{ジュール}) \qquad (4.24)$$

である．

(4.23)は，電場があらかじめ与えられているときその中の置かれた電荷のポテンシャルエネルギーである．つぎに，電荷 q_1，q_2 が位置 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ にあり，他に電場の原因がないときのポテンシャルエネルギーを求めよう．q_1 が q_2 の位置に作る静電ポテンシャルは

$$\phi_1(\boldsymbol{r}_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} \qquad (4.25)$$

だから，電荷 q_2 がもつポテンシャルエネルギーは

$$U_2(\boldsymbol{r}_2) = q_2\phi_1(\boldsymbol{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} \qquad (4.26)$$

である．一方，電荷 q_1 がもつポテンシャルエネルギーは，同様に

$$U_1(\boldsymbol{r}_1) = q_1\phi_2(\boldsymbol{r}_1) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} \qquad (4.27)$$

であるが，明らかに $U_2(\boldsymbol{r}_2) = U_1(\boldsymbol{r}_1)$ である．$U_2(\boldsymbol{r}_2)$ は，互いに無限に離れていた電荷 q_1 と q_2 のうち，まず q_1 を $\boldsymbol{r}_1$ にもってきた後で，q_2 を $\boldsymbol{r}_2$ にもってくるのに要する仕事と見なすことができる．最初は電場がないから q_1 の移動には力，したがって仕事を要しないからである．同様に，$U_1(\boldsymbol{r}_1)$ の方は，逆の順序でこの電荷配置を作ったとしたときに要する仕事と見なすことができる．つまり，これらは同じポテンシャルエネルギーの異なる立場からの見方と考えてよいので，等しいのは当然である．一般的に，ポテンシャルエネルギーは，電荷の「位置」のエネルギーというよりは「配置」のエネルギーと考えるべきものである．このような立場からは $U_2(\boldsymbol{r}_2)$ と $U_1(\boldsymbol{r}_1)$ は対等であり，この配置がもつエネルギーとして

$$U = \frac{1}{2}(U_1(\boldsymbol{r}_1) + U_2(\boldsymbol{r}_2)) = \frac{1}{2}(q_1\phi_2(\boldsymbol{r}_1) + q_2\phi_1(\boldsymbol{r}_2)) \tag{4.28}$$

と書くことができる．これを一般化して，n 個の電荷 $q_1, \cdots, q_n$ のある配置がもつ静電エネルギーは

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\phi_i \tag{4.29}$$

と書くことができる．ただし，ϕ の添え字の意味を変え，q_i 以外のすべての電荷が q_i の位置に作る静電ポテンシャルを ϕ_i とした(上の例では，$\phi_1(\boldsymbol{r}_2) \to \phi_2$)．

連続的な電荷が密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ で分布している場合に，その連続的な電荷配置がもつポテンシャルエネルギーが

$$U = \frac{1}{2}\int\phi(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})\,dV \tag{4.30}$$

で与えられることは積分の意味から明らかであろう．

例題 4.1

陽子と電子が距離 $a_B = 5.29 \times 10^{-11}$ m (水素原子のボーア半径) だけ離れて存在しているときのポテンシャルエネルギーを求めなさい．またそれを eV (**電子ボルト**) 単位で求めなさい．ただし，1 eV = 1.60 × 10^{-19} J である．

［**解**］ 陽子と電子の電荷は $\pm q = \pm e = \pm 1.60 \times 10^{-19}$ C だから

$$U = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_B} = -8.99 \times 10^9 \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{5.29 \times 10^{-11}} = -4.35 \times 10^{-18}\ \text{J} = -27.2\ \text{eV}$$

§ 4.3　静電ポテンシャルの例

いくつかの電荷分布について，静電ポテンシャルを計算しよう．

［**例 1**］ **一様な電場**

図 4.6 のように，一様な電場の向きを x 軸に選ぶと，電場の強さは

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E\,\boldsymbol{e}_x = 一定 \tag{4.31}$$

と表すことができる．よって，$\boldsymbol{r}_0$ を基準とする静電ポテンシャルは

$$\boldsymbol{e}_x\cdot d\boldsymbol{r} = dx \tag{4.32}$$

より

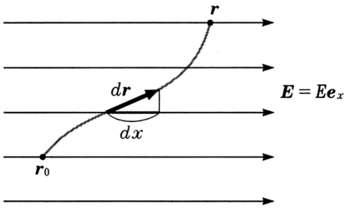


図 4.6

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= -\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}\\ &= -\int_{r_0}^{r}E\,\boldsymbol{e}_x\cdot d\boldsymbol{r}\\ &= -E\int_{x_0}^{x}dx = -E[x]_{x_0}^{x} = -E(x-x_0)\end{aligned} \tag{4.33}$$

である．この場合は無限遠を基準点に選ぶことはできない．

［例 2］　半径 a の球形領域に一様な密度 ρ で分布した電荷

図 4.7 のような電荷分布である．全電荷 q は (3.51) で，電場の強さは (3.54)，(3.56) で与えられるから，無限遠を基準にとると

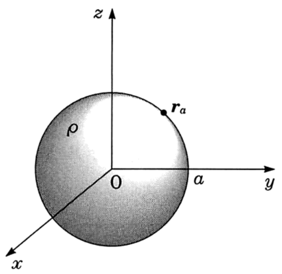


図 4.7

$r \geqq a$　のとき

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= -\int_{\infty}^{r}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r}\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_{\infty}^{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\end{aligned} \tag{4.34}$$

$r \leqq a$ のとき

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= -\int_{\infty}^{r_a}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r} - \int_{r_a}^{r}\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\boldsymbol{e}_r\cdot d\boldsymbol{r}\\ &= \left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_{\infty}^{a} - \left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\frac{r^2}{2}\right]_{a}^{r}\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 a^3} + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a^3}(3a^2 - r^2)\end{aligned} \tag{4.35}$$

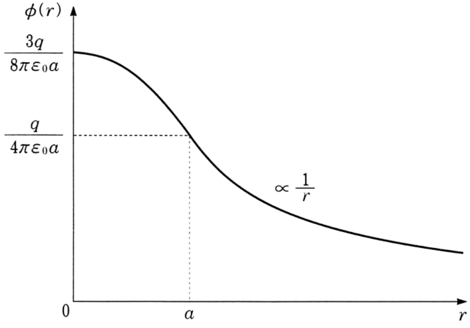


図 4.8

である．$\phi(\boldsymbol{r})$ を動径座標 r の関数として表すと，図 4.8 のようになっている．

［例 3］ 線電荷密度 λ で一様に帯電した無限に長い直線

図 4.9 のように直線上に原点をとり，直線を z 軸とする円筒座標 (ξ, φ, z) で表示すると，周りの電場は，(3.78)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\xi}\boldsymbol{e}_\xi$$

で与えられる．任意に選んだ $\boldsymbol{r}_0$ を基準とする静電ポテンシャルは，$\boldsymbol{e}_\xi\cdot d\boldsymbol{r} = d\xi$ を利用して

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\xi}\boldsymbol{e}_\xi\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= -\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\lambda\, d\xi}{2\pi\varepsilon_0\xi} \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\xi\Big|_{\xi_0}^{\xi} \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{\xi}{\xi_0} \qquad (4.36)\end{aligned}$$

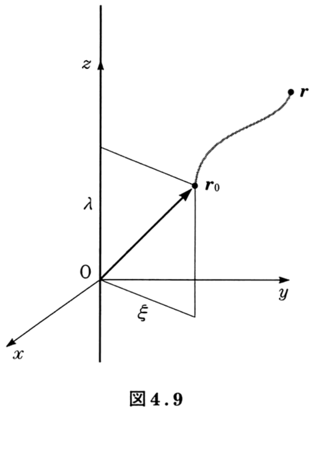


図 4.9

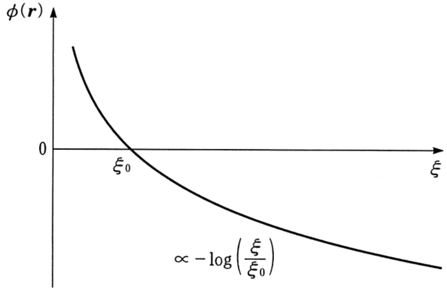


図 4.10

である．ξ_0 は $\boldsymbol{r}_0$ の ξ 座標である．この場合も，無限遠を基準点に選ぶことはできない．図 4.10 に $\phi(\boldsymbol{r})$ を ξ の関数として示した．

例題 4.2

図 4.11 のように半径 a の球面上に一様な密度 σ で分布した電荷の周りの静電ポテンシャルを求め，中心からの距離 r の関数として図示しなさい．

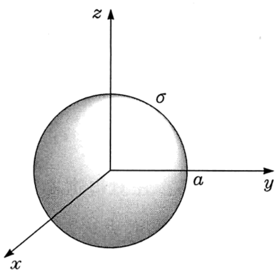


図 4.11

［**解**］　電荷の総量は

$$q = 4\pi a^2 \sigma \tag{4.37}$$

である．電場の強さは

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r = \dfrac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r & r > a \end{cases} \tag{4.38}$$

であるから，無限遠を基準にとると

$$r \geqq a \quad \text{のとき} \quad \phi(\boldsymbol{r}) = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_\infty^r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r} \tag{4.39}$$

$$r \leqq a \quad \text{のとき} \quad \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \tag{4.40}$$

である．$\phi(r)$ を動径座標 r の関数として示すと図 4.12 のようになる．

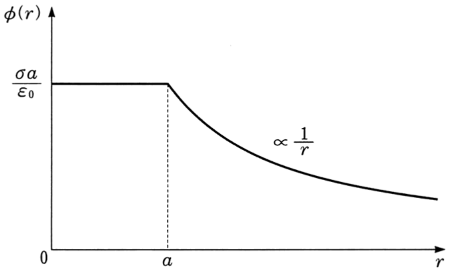


図 4.12

§4.4　電場の強さと静電ポテンシャルの微分関係

静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ は電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ から (4.12) の積分の関係で定義された．逆に，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を $\phi(\boldsymbol{r})$ で表すことが可能である．それには偏微分を使う．

2 変数関数 $z = g(x, y)$ があるとき，その x に関する**偏導関数**は

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x, y) - g(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x, y)}{\Delta x}\bigg|_{y=\text{const}} \tag{4.41}$$

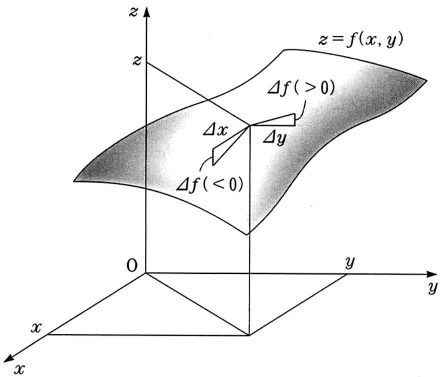


図 4.13

である (図 4.13). このように, 他の変数 (いまの場合は y) の値を止めてひとつの変数 (いまの場合は x) についてだけ微分しておいて, 改めてそれを 2 変数 $(x,\ y)$ の関数とみなすものが偏導関数であり, そのような微分計算を**偏微分**という. 偏微分の計算は他の変数を止めておいて行うから, 1 変数関数 $y = f(x)$ の常微分と同じようにできる.

3 変数以上の場合も, 関数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の変数 x_i に関する偏導関数は

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{g(x_1, \cdots, x_i + \Delta x_i, \cdots, y_n) - g(x_1, \cdots, x_i, \cdots, y_n)}{\Delta x_i} \tag{4.42}$$

と定義される.

さて, $\phi(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の関係を, 離れた 2 点間のある経路に沿った積分ではなく, 1 点 $\boldsymbol{r}$ における関係として表すのがいまの目的である. そのために, 図 4.14 のような点 $\boldsymbol{r}$ から x 軸に平行な方向に離れた近傍の点 $\boldsymbol{r} + \Delta x\, \boldsymbol{e}_x$ と点 $\boldsymbol{r}$ の静電ポテンシャルの差を求めると, (4.22) より

$$\phi(\boldsymbol{r}+\Delta x\,\boldsymbol{e}_x)-\phi(\boldsymbol{r})=-\int_{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{r}+\Delta x\,\boldsymbol{e}_x}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.43}$$

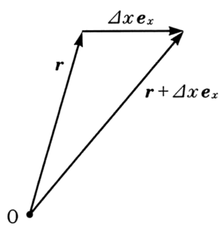


図 4.14

である．ここで積分の意味は (2.19) のように，2 点の間を細かく分けて，各点での $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i$ の和の分割数を無限大にした極限であった．しかし，いまの場合はそもそも 2 点間の距離がすでに微小なのだから，その中をさらに分割するまでもなく

$$\phi(\boldsymbol{r}+\Delta x\,\boldsymbol{e}_x)-\phi(\boldsymbol{r})\approx-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\Delta x\,\boldsymbol{e}_x=-E_x(\boldsymbol{r})\Delta x$$

である．よって

$$E_x(\boldsymbol{r})\approx-\frac{\phi(\boldsymbol{r}+\Delta x\,\boldsymbol{e}_x)-\phi(\boldsymbol{r})}{\Delta x} \tag{4.44}$$

である．この ≈ は，2 点間の距離が無限小（$\Delta x\to 0$）になれば = に置き換えることができ，またそのときこれは偏導関数の定義そのものになっているから

$$E_x(\boldsymbol{r})=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)}{\Delta x}=-\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x} \tag{4.45}$$

である．

同様に y 軸および z 軸に沿った微小な変位 $\Delta\boldsymbol{r}=\Delta y\,\boldsymbol{e}_y$ および $\Delta z\,\boldsymbol{e}_z$ を考えることにより，

$$E_y(\boldsymbol{r})=-\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y},\qquad E_z(\boldsymbol{r})=-\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z} \tag{4.46}$$

が得られる．したがって，求める関係は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})&=\left(-\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x},-\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y},-\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right)\\&=-\left(\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\end{aligned} \tag{4.47}$$

である．負号は (4.43) の負号，さらにさかのぼれば $\phi(\boldsymbol{r})$ の定義 (4.12) の負号に由来する．上式は形式的に

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(\boldsymbol{r}) \tag{4.48}$$

と書くことができる．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{4.49}$$

は x，y，z 成分をもつ演算子（ベクトル演算子）で，**ナブラ**または**デル**とよぶ．これはスカラー場に作用して，その x，y，z に関する偏微分をそれぞれ x 成分，y 成分，z 成分とするベクトル場を作る演算子である．これを用いると (4.48) は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) \tag{4.50}$$

と書ける．$\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ はまた $\mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})$ とも書くことがあり，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) \tag{4.51}$$

である．負号を除いた $\mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})$ つまり $\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ を $\phi(\boldsymbol{r})$ の**勾配**ともいう．

(4.47)，(4.48)，(4.50)，(4.51) などを見ると，$\phi(\boldsymbol{r})$ は電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を導く潜在的なスカラー場であることがわかる．この意味で，$\phi(\boldsymbol{r})$ はポテンシャルとよばれるのである．

例題 4.3

$\nabla(1/r)$ を計算し，点電荷の周りの静電ポテンシャルが (4.15) で与えられることがわかっているとして，電場を求めなさい．

［**解**］ $\nabla(1/r)$ の x 成分は

$$\left(\nabla\frac{1}{r}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{4.52}$$

であり，y 成分，z 成分も同様に求まるから，

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (4.53)$$

である．よって求める電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (4.54)$$

で確かに (3.15) に等しい．

§ 4.5　等ポテンシャル面

3 次元空間の

$$\phi(\boldsymbol{r}) = 一定 \qquad (4.55)$$

の関係を満たす点の集合は面であるが，それを**等ポテンシャル面**あるいは**等電位面**という．$\phi(\boldsymbol{r})$ の勾配 $\nabla\phi(\boldsymbol{r})$，したがって (4.50) より電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は，等ポテンシャル面に垂直である．

［証明］図 4.15 のように点 $\boldsymbol{r}$ からの任意の無限小変位 $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$ を考えると

$$\phi(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}) - \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\cdot(dx, dy, dz) = \nabla\phi\cdot d\boldsymbol{r} = |\nabla\phi||d\boldsymbol{r}|\cos\theta \qquad (4.56)$$

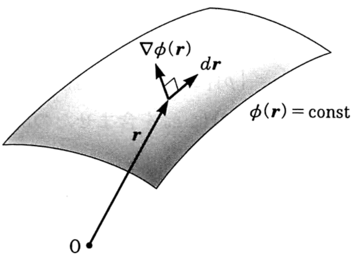


図 4.15

である．いま，$\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$ が $\boldsymbol{r}$ を含む等ポテンシャル面上にあるとき，

$$0 = |\nabla\phi||d\boldsymbol{r}|\cos\theta \qquad (4.57)$$

であるが，これは

$$\nabla\phi \neq 0 \quad のとき \quad \cos\theta = 0 \quad だから \quad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad (4.58)$$

すなわち，$\nabla\phi(\boldsymbol{r})\,(\equiv -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}))$ が等ポテンシャル面に垂直であることを意味

している．

§4.6　電気双極子

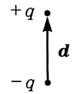


図 4.16

図 4.16 のように，同じ大きさの正負の電荷 $+q$ と $-q$ の対が距離 d だけ離れて存在するとき，両方をまとめて**電気双極子**という．$-q$ から q に向かう相対位置ベクトルを $\boldsymbol{d}$ とするとき

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d} \tag{4.59}$$

を(**電気**)**双極子モーメント**という．通常の分子は双極子モーメントをもっていないが，電場 $\boldsymbol{E}$ をかけると電子の電荷分布の中心と原子核の電荷分布の中心の位置がずれて，双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ をもつ．$\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{E}$ に比例する．

$$\boldsymbol{p} = \alpha\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{4.60}$$

と書くとき α を**分極率**という．$\boldsymbol{p}$ と α の次元と SI 単位は

$$[\boldsymbol{p}] = LQ: \quad \mathrm{C \cdot m} \tag{4.61}$$

$$[\alpha] = [p][\varepsilon_0 E]^{-1} = [p][D]^{-1} = QLQ^{-1}L^2 = L^3: \quad \mathrm{m}^3 \tag{4.62}$$

である．(4.60)に ε_0 を含ませたのは，α の次元をこのように単純にするためと言ってよい．

塩化水素 HCl のような分子は，図 4.17 のように原子核による正電荷の分布の重心と電子による負電荷の分布の重心が異なる(電子が Cl の側に偏って

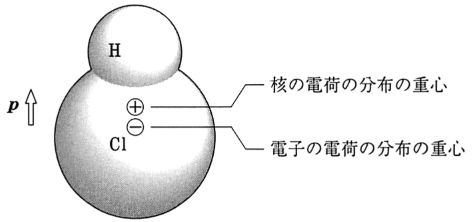


図 4.17

分布している）ので，電場がなくても電気双極子になっている．このような状態を**永久電気双極子モーメント**をもつという．

電気双極子の周りの電場

電気双極子だけを内部に含む任意の閉曲面についてガウスの法則を適用すると

$$\oint_{S} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{4.63}$$

であるが，これは，左辺の積分が必ず満たすべき性質を表しているだけで，それ自体，各点の電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ や電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ についての情報は与えない．ガウスの法則を利用して各点の電場の計算ができるのは，対称性の高い場合だけであった．電気双極子は対称性が高くないので，ガウスの法則で電場を計算することはできない．しかし，静電場は必ずクーロンの法則の重ね合せで表されるから，それを用いれば求めることができる．

$-q$ と q の中点を原点に選ぶと，(3.19) より

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q\left(\boldsymbol{r} - \dfrac{\boldsymbol{d}}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_0\left|\boldsymbol{r} - \dfrac{\boldsymbol{d}}{2}\right|^3} + \frac{-q\left(\boldsymbol{r} + \dfrac{\boldsymbol{d}}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_0\left|\boldsymbol{r} + \dfrac{\boldsymbol{d}}{2}\right|^3} \tag{4.64}$$

であるが，

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{r} \pm \frac{\boldsymbol{d}}{2}\right| &= \sqrt{\left(\boldsymbol{r} \pm \frac{\boldsymbol{d}}{2}\right)\cdot\left(\boldsymbol{r} \pm \frac{\boldsymbol{d}}{2}\right)} = \sqrt{r^2 \pm \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d} + \frac{d^2}{4}} \\ &= r\left(1 \pm \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{4.65}$$

だから

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q\left(\boldsymbol{r} - \dfrac{\boldsymbol{d}}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^3\left(1 - \dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{r^2} + \dfrac{d^2}{4r^2}\right)^{3/2}} + \frac{-q\left(\boldsymbol{r} + \dfrac{\boldsymbol{d}}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^3\left(1 + \dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{r^2} + \dfrac{d^2}{4r^2}\right)^{3/2}} \tag{4.66}$$

である．ここまでは近似のない厳密な表式である．

次に，電気双極子より十分離れた点での電場の近似表式を求める．$|\boldsymbol{r}| \gg |\boldsymbol{d}|$ なる点では，マクローリン級数に展開して

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left\{\left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{d}}{2}\right)\left[1 + \frac{3\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{2r^2} + O\left(\frac{d}{r}\right)^2\right] - \left(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{d}}{2}\right)\left[1 - \frac{3\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{2r^2} + O\left(\frac{d}{r}\right)^2\right]\right\}$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d})}{r^2}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{d}\right] \tag{4.67}$$

である．$O(d/r)^2$ は d/r についての2次以上の微小量を表す．(4.59) より

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] \tag{4.68}$$

とも書ける．$\boldsymbol{p}$ と平行に z 軸を選ぶと，$\boldsymbol{p} = p\,\boldsymbol{e}_z$ より

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3p(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3zp}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] \tag{4.69}$$

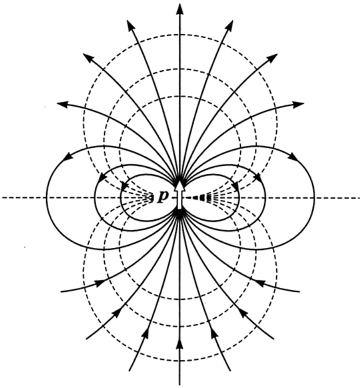


図 4.18

である．また，$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$ を用いれば

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r)\,\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{3p\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{4.70}$$

とも書ける．ただし，θ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{r}$ の間の角度である．

さらに，

$$\boldsymbol{p} = p\,\boldsymbol{e}_z = p(\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta) \tag{4.71}$$

を用いて書き直すと

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{2p\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + p\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{4.72}$$

である．これらから，双極子モーメントの周りの電場は r^3 に反比例することがわかる．$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の様子を図 4.18 に実線で示す．

電気双極子の周りの静電ポテンシャル

電気双極子の周りの静電ポテンシャルも，正負の電荷が作る静電ポテンシャルの重ね合せから，同様に求められる．

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left|\boldsymbol{r}-\dfrac{\boldsymbol{d}}{2}\right|} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\left|\boldsymbol{r}+\dfrac{\boldsymbol{d}}{2}\right|} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r\sqrt{1-\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{r^2}+\dfrac{d^2}{4r^2}}} - \frac{1}{r\sqrt{1+\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{r^2}+\dfrac{d^2}{4r^2}}}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{\left[1+\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{2r^2}+\left(O\frac{d}{r}\right)^2\right]-\left[1-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{2r^2}+O\left(\frac{d}{r}\right)^2\right]\right\} \\
&\approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d}}{r^2} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

である．これから決まる等ポテンシャル面を図 4.18 に破線で示す．特に，正負の電荷を結ぶ線の垂直二等分面上の点は $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{d} = 0$ を満たすので，

$$\phi(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{4.74}$$

である．つまり，この平面は等ポテンシャル面である．

例題 4.4

電気双極子の周りの静電ポテンシャルを，電場の場合にならってさまざまな異なる表現で表しなさい．

［**解**］ まず，$\boldsymbol{p} = p\,\boldsymbol{e}_z$ より

$$\phi(\boldsymbol{r}) \approx \frac{p\,\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \tag{4.75}$$

である．また，$\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e}_r$ より

$$\phi(\boldsymbol{r}) \approx \frac{p\,\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{4.76}$$

である．これから，双極子モーメントの周りの静電ポテンシャルは r^2 に反比例することがわかる．また，(4.53) を用いれば

$$\phi(\boldsymbol{r}) \approx -\frac{\boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) \tag{4.77}$$

である．

例題 4.5

半径 a の球内に一様な密度 ρ で分布した正電荷と，同じ半径の球内に一様な密度 $-\rho$ で分布した負電荷がある．これらが中心を一致させて存在するときは，電荷が全く無いのと同じで，電場はできない．いま，図 4.19 のように正電荷密度が z 方向に微小距離 $\delta/2(\ll a)$ だけずれ，負電荷が z 方向に $-\delta/2(\ll a)$ だけずれたとする．全体は依然として球で近似できるとして，極座標の点 (a, θ, φ) に現れる表面電荷密度を求めなさい．また，球内外の電場を求めなさい．

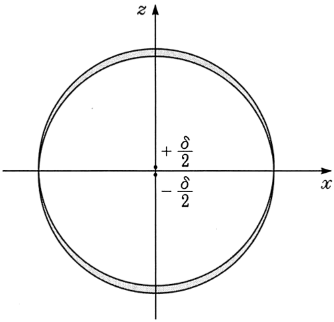


図 4.19

［**解**］ 表面付近では正負の分布の重なりが外れて，上半分の表面には正の電荷が現れ，下半分の表面には負の電荷が現れる．ずれ がすべての点で z 方向に $\pm\,\delta/2$ だから，球面上の点 (a, θ, φ) における ずれ の厚さ（r 方向のずれ）t は

$$t = \delta\cos\theta \tag{4.78}$$

である (図 4.20)．ずれ の部分には密度 ρ の電荷が現れているから，厚さを無視して面電荷密度としてみると，

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \rho t = \rho\delta\cos\theta \tag{4.79}$$

である．原点を中心として半径 a の球内に一様に分布した電荷が作る電場は［例題 3.3］で求めたから，求める電場はこれをずらして重ね合わせればよい．まず，球内 $r < a$ の電場は (3.54) を参照して

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{\delta e_z}{2}\right) + \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\left(r + \frac{\delta e_z}{2}\right)$$

$$= -\frac{\rho\delta}{3\varepsilon_0}e_z \tag{4.80}$$

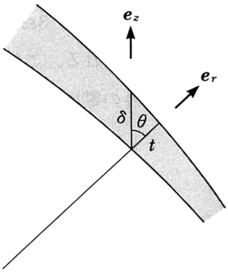


図 4.20

である．これは一様な電場である．

また，球外 $r > a$ の電場は (3.56) を参照して

$$E(r) = \frac{q[r - (\delta/2)e_z]}{4\pi\varepsilon_0|r - (\delta/2)e_x|^3} + \frac{-q[r + (\delta/2)e_z]}{4\pi\varepsilon_0|r + (\delta/2)e_z|^3} \tag{4.81}$$

である．ただし

$$q = \frac{4\pi a^3}{3}\rho \tag{4.82}$$

は半径 a の球内に一様に分布した正電荷の総和である．つまり，$r > a$ の領域の電場は，仮に全電荷が中心に集中したときにできる点電荷の位置が $\pm\ (\delta/2)e_z$ だけずれてできる双極子モーメント

$$p = q\,\delta e_z = \frac{4\pi a^3}{3}\rho\,\delta e_z \tag{4.83}$$

が作る電場に等しい．δ が十分小さければ $r \gg \delta$ だから，(4.67) で用いた近似が成り立ち，結果は (4.69)，(4.70)，(4.72) で (4.83) の置き換えをすればよく

$$E(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left[\frac{3z\delta}{r^5}r - \frac{\delta e_z}{r^3}\right]$$

$$= \frac{3\rho a^3\delta\cos\theta\, e_r - \rho a^3\delta e_z}{3\varepsilon_0 r^3}$$

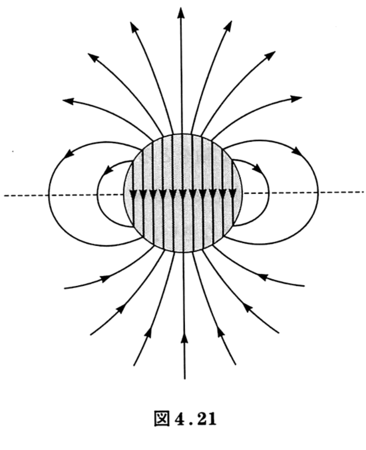


図 4.21

$$= \frac{2\rho a^3 \delta \cos\theta\, \boldsymbol{e}_r + \rho a^3 \delta \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\theta}{3\varepsilon_0 r^3} \qquad (r > a \gg \delta) \tag{4.84}$$

等の表式が得られる．これは $r > a$ で図 4.18 と同じはずだから，(4.80) と (4.84) が表す球内外の電場の様子は図 4.21 のようになる．

演習問題

[1]　電場の強さが 3.3×10^6 V/m になると，空気が放電するものとする．空気中に孤立した半径 1 m の導体球に与えることのできる電荷の最大値とそのときの導体球の電位を求めなさい．

[2]　半径 a の細い円環に一様な線密度 λ で分布した電荷の中心軸上 z の静電ポテンシャルを求め，それから電場の向きと大きさを求めなさい．

[3]　半径 a の薄い円板上に一様な面密度 σ で分布した電荷の中心軸上 z の点の静電ポテンシャルを求め，それから電場の向きと大きさを求めなさい．

[4]　位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に作用するナブラ演算子を ∇ とするとき，

$$\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

を計算しなさい．

[5]　HCl 分子の電気双極子モーメントは 1.3×10^{-29} C・m である．正負の電荷分布の重心の中間を原点にとり，双極子モーメントベクトルの向きに z 軸をとるとき，x 軸上 $x = 2 \times 10^{-10}$ m および z 軸上 $z = 2 \times 10^{-10}$ m の位置の電場の強さと向きを求めなさい．

[6]　図 4.22 のように一様な電場 $\boldsymbol{E}$ の中に角度 θ で置かれた双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ のポテンシャルエネルギーを求めなさい．

[7]　双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ の周りのポテンシャルから電場を求めなさい．

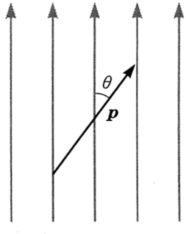


図 4.22

5 導体と静電場

前章で，球内に一様に分布した電荷についての考察をしたとき，真空中に同種の電荷が決まった分布の形を保ちながら存在することは不可能ではないか，という感じをもった読者がいるとすれば，それは正しい感覚である．同種の電荷がクーロン力で反発し合って，分布の範囲が広がってしまうのは当然だからである．これまで考えてきたことは，仮にそのような電荷分布があったとして，電場はどうなっているかという考察だったのである．物理学では，このような理想化した状態についての考察をまず行って，現実の状況についての考え方の基本とすることがよくある．これは，現象をなるべく少ない基本原則から理解しようとする物理学が，複雑な現実の現象の理解に取り組む際の，ひとつの方法である．

現実の固体は，正の電荷をもった原子核と負の電荷をもった電子から成る中性の原子の集合体である．この正と負の電荷の引力が元になって凝集力が生じ，固体はその形を保っている．マクロな電磁気学は，凝集力を暗黙の前提として，膨大な数の正の電荷と負の電荷が打ち消し合ったあとに残る正味の電荷についての学問である．このことに注意しながら，本章では導体，第 7 章では絶縁体が存在するときの電場の性質を調べる．

§5.1　導体に関する実験事実

物質には電気の通りやすさについて大きな差がある．電気の通りやすさによって物質を分類すると，金属，半金属，半導体，絶縁体などに分けられる．これらのうち，絶縁体以外を**導体**とよぶ．代表的な導体としては，アルミニウムや銅や銀などの金属を想定すればよい．導体中を電流が流れる現象につ

いては第6章で学ぶことにして，ここでは，電流が流れていない場合を扱う．

導体に特有な静電気的な現象をまとめると

（1） 図5.1のように，導体に電荷 q を近づけると，q に近い側に q と反対符号の電荷が，遠い側に同じ符号の電荷が誘起される．この現象を**静電誘導**という．

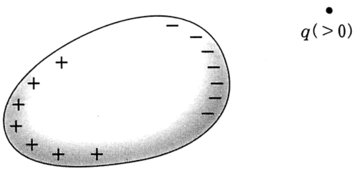


図5.1

（2） 導体を（1）の状態のままで図5.2のように q に近い側と遠い側の二つに切り分けると，それぞれが正と負に帯電する．(図5.2は，その後 q を遠ざけ，切り分けた二つの部分は近づけたままの場合の電荷分布を示す．二つの部分を互いに離すと各部分の余分の電荷は表面全体に広がって分布する.)

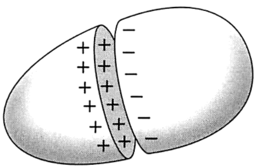


図5.2

（3） 導体表面を絶縁体で摩擦したり(摩擦電気)，帯電した他の導体と接触させたりして，電荷を与える（**帯電させる**）ことができるが，与えられた電荷は表面上に分布する．

（4） 空洞をもった導体の内表面に電荷を与えても，その電荷はすべて導体の外表面に移って分布する．

§5.2　導体の基本的性質と諸現象の理解

導体がどのようなものであるかを知り，それによって，前節に述べた現象を理解しよう．

物質といえども，正の電荷（原子核）と負の電荷（電子）が真空中に浮か

んでいることには変りない．重ね合せの原理から，これらすべての粒子がつくる電場を加え合わせれば周りの電場は表現できる．しかし，すべての粒子の位置を知ることは不可能であるし，また，正負の電荷の効果は結局大部分打ち消し合っているのに，その元にさかのぼって重ね合わせるのは実用的なアプローチではない．そこで，基本的に正負の電荷が打ち消し合っているという立場から出発して，そこからの変化の効果をとらえることにする．実際にマクロに観測される電場も，そのような平均からの ずれ による効果のみである．

導体は多数の自由に動ける電荷(**自由電子**)を含む物質である．巨視的(マクロ)な電磁気学では，この自由電子を粗視化して連続的に分布した負の電荷密度として扱い，一方，原子核とその周りに束縛されている電子を合わせた正イオンも粗視化して連続的に分布した正の電荷密度として扱う．

「導体は多数の自由に動ける電荷を含む」という事実だけから，以下のような基本的性質をもつことが理解できる．

（i）　導体の内部では $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0$ である．

もし仮に $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\neq 0$ の部分があると，自由に動ける電荷が力を受けて，内部が $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0$ となるような電荷分布になるまで移動し配置を変えるはずである．

（ii）　導体内部には正味の電荷は存在しない．

なぜなら，（i）より，導体内のどこでも $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0$ だから $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=0$ である．そうであれば，ガウスの法則から図5.3のような導体内の任意の閉曲面Sについて

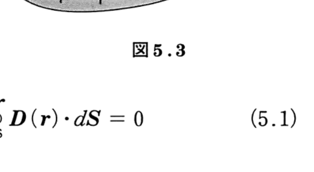


図5.3

$$q_{\text{内部}}=\int_{\mathrm{V}}\rho(\boldsymbol{r})\,dV=\oint_{\mathrm{S}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=0 \tag{5.1}$$

といえる．

（iii）　導体に電荷があるとすれば表面である．

なぜなら，（ii）より正味の電荷は導体内部には存在できないから，（i）の過程で最後に行き着く先は表面である．

（iv）　静電誘導

以上から，前節の静電誘導についての説明が可能になる．正負の電荷を同量ずつ含む帯電していない導体に，外から電場がかかっていないときは，これらの電荷は全く重なり合って中性になり，あたかもそこに電荷がないかのようになっている．外からの電場(外場)として，たとえば図5.4のように導体に電荷 q を近づけると，重ね合せの原理より，q が作る電場 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ は導体内にも存在する．しかし，その外場を感じた自由電子が表面に移動して，内部の外場を打ち消すような電場 $\boldsymbol{E}_-'(\boldsymbol{r})$ を作る．自由電子が移動すると，後にはイオンの正電荷が残る．そのイオンの位置に別の電子が来て電荷を打ち消す．このようにしてイオンは見かけ上電子と反対方向に動く．最後に反対側の表面の原子の付近の電子が移動して正イオンが残されるとそれ以上の変化は起きないから，その部分に正の電荷が現れる．この正電荷による電場 $\boldsymbol{E}_+'(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{E}_-'(\boldsymbol{r})$ が重ね合わさって，外からの電場を打ち消す．このようにして導体のいたるところで

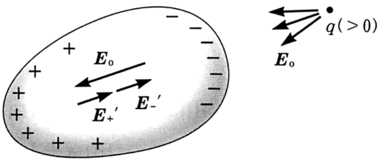


図5.4

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_-(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_+(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{5.2}$$

となる．必ずそうなるように正負の電荷が表面に分布するのである．

以上では，自由電子が動くとして現象を説明したが，物質のミクロな構造や性質に立ち入らないときは，何らかの正電荷が自由に動いて負の電荷が取り残されるというイメージで考えても，両方が自由に動いて相対的にずれる

と考えてもよい．要するに，電荷の総和が 0 の状態から出発して，表面に電荷分布の偏りができて，それが外からの電場を完全に打ち消したときが最終的な電荷分布である．一般に正の電荷が動くと考えた方がわかりやすいこともあるし，また，正であれ負であれ，表面に現れた電荷が動いてきたと考える方がイメージが描きやすいこともあるので，動く電荷の符号にこだわらなくてよい．本当に必要なときに限って自由電子の電荷が負であることを考慮するのが，マクロな電磁気学では実用的である．

導体の性質についてさらに調べを続けよう．

（v）　導体内部および表面は等ポテンシャル(同電位)である．

導体の内部では $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0$ だから，(4.22)より，導体内の任意の 2 点の電位差は 0，つまり

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \text{一定} \tag{5.3}$$

である．さらに，表面では一般に電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に有限の大きさのとび(不連続性) があるが，静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ は積分 (4.12) で定義されているから，連続的に変化する．よって，表面を含めて導体全体が等ポテンシャルである．導体の静電ポテンシャルを**導体の電位**ともいう．

（vi）　導体表面のごく近傍の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は表面に垂直である．

なぜなら，（v）より導体表面は等ポテンシャル面だから，§4.5 で学んだように，電場はこの面に垂直のはずである．

以上述べた（i）～(vi）は，導体内外の静的な電場に対してはいかなる場合にも成立する．くり返すが，そうなるように自由電子と正イオンが配置するのである．

例題 5.1

導体でできた半径 a の球に電荷 Q を与えたときの，導体内外の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ とを求めなさい．

［**解**］　電荷は導体内部には存在できないから表面に現れる．表面の形が球なの

で，同種の電荷が反発し合って一様に分布する．密度は $\sigma = Q/4\pi a^2$ である．（表面が球でなければ，密度は位置によって異なる．）よって，[例題 4.2]で与えられた状況が実現している．[例題 4.2]では，とにかくそのような電荷分布が与えられたとして計算したが，いまは実際にそのような分布になることがわかったので，その結果を使うことができる．導体の内部では $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$ である．$r > a$ の電場は，中心を原点に選ぶと，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{4.38$'$}$$

である．これは，中心に電荷 Q が存在するときの電場に等しい．無限遠を基準とする静電ポテンシャルも [例題 4.2] より

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (r \geqq a) \tag{4.39$'$}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \qquad (r \leqq a) \tag{4.40$'$}$$

である．$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ は図 4.12 に示されている．

§5.3　中空導体の内表面上の電荷

導体がある場合の電場の考察を続けよう．中空部をもった導体では，中空部に孤立した電荷が存在する場合を除き，内表面に電荷は現れない．これは次のようにして証明することができる．

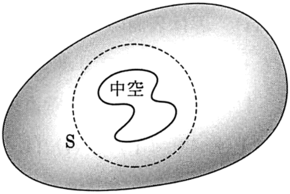


図 5.5

内表面にある電荷の総量 $q_{\text{内表面}}$ はガウスの法則で計算できる．図 5.5 のように中空部を内部に含み，導体内部だけを通る閉曲面 S を考えると，その上では常に $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = 0$ だから，

$$q_{\text{内表面}} = \oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{5.4}$$

である．よって，Sに囲まれた領域内には，電荷が存在しないか，存在する場合は内表面上に正負が同量，分離して存在しているはずである．もし仮に，後者のように電荷が存在したとすると，当然，中空部に電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が存在することになる．そこで，次に，中空部内を図5.6のように通り，導体内を通って閉じる閉曲線 l を考えて，l に沿っての電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の循環を計算すると，導体内では $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=0$ だから

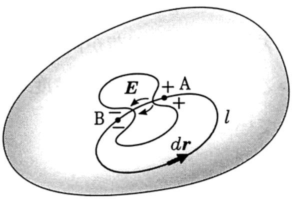


図5.6

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\substack{\mathrm{A}\\(\text{空洞内})}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\substack{\mathrm{B}\\(\text{導体内})}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\substack{\mathrm{A}\\(\text{空洞内})}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \neq 0 \tag{5.5}$$

である．これは，静電場が保存場であるという性質（4.10）に反する．このことから，外表面に与えられた電荷が内表面に現れることはなく，逆にもし導体の内表面に電荷を与えても，それは必ず外表面に移動してそこに現れることがわかる．また，導体内の空洞は，外にどれだけ強い電場が存在しても常に導体と同電位に保たれ，電場が存在しない．これを**静電遮蔽**という．

中空部に電荷があるときは，(5.1) が成り立たないから，あらためて基本性質 (ⅰ)，(ⅲ)にしたがって考えると，異なる結論が出てくる．これについては§5.5で学ぶ．

なお，クーロンの法則の r^{-2} 依存性の高精度の検証は，図5.7のように，中空の導体の内部に別の導体を置き，それを

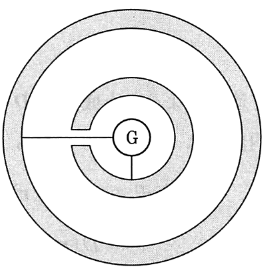


図5.7

外の導体と導線でつないで一体とし，その導線の途中に検流計 G を置いて，外表面に与えた電荷が内部の導体に移らないことを確かめることで行われている．現在では，10^{-16} の精度でこのべき数が整数の -2 に近いことが確かめれている．

§5.4　導体表面近傍の電場と表面電荷密度

以上で，静電誘導で現れた電荷も，外から与えられた電荷も，導体の表面に分布することがわかったが，その電荷密度分布の詳細は，次節で学ぶような対称性がよい場合以外は，簡単には知ることができない．しかし，導体表面の任意の1点に注目したとき，その点の表面電荷密度とそのすぐ外の空間の電場との間に成り立つ関係は知ることができる．

図5.8のような導体表面上の点 $\boldsymbol{r}$ の面電荷密度を $\sigma(\boldsymbol{r})$ とする．その点のすぐ外の点 $\boldsymbol{r}_>$ の電場を考える．$\boldsymbol{r}_>$ を中心とする導体表面に平行な上底と導体表面に垂直な側面をもち，点 $\boldsymbol{r}$ を内部に含む微小円筒を考える．上底下底の面積 $\varDelta A$ は十分小さいものとする．この円筒についてガウスの法則

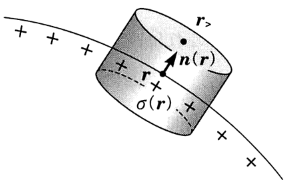


図5.8

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = q_{\text{内部}} \tag{5.6}$$

を適用しよう．上底では $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \parallel d\boldsymbol{S}$，導体外の側面では $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \perp d\boldsymbol{S}$，導体内部では $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = 0$ だから

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \int_{\text{上底}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\text{下底}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} + \int_{\text{側面}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \\ &\approx D(\boldsymbol{r}_>)\varDelta A + 0 + 0 = D(\boldsymbol{r}_>)\varDelta A \end{aligned} \tag{5.7}$$

である．一方，$q_{\text{内部}}$ は円筒内部に含まれる導体表面の電荷だから

$$右辺 \approx \sigma(\boldsymbol{r})\varDelta A \tag{5.8}$$

である．よって

$$D(\boldsymbol{r}_>) \approx \sigma(\boldsymbol{r}), \qquad E(\boldsymbol{r}_>) \approx \frac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \tag{5.9}$$

である．ここで，$\varDelta A \to 0$ とし，かつ $\boldsymbol{r}_>$ を表面上の点 $\boldsymbol{r}$ に限りなく近づけると，$\approx$ は $=$ になるが，さらに $\boldsymbol{r}_>$ の電場の向きが表面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ に平行であることも考慮すると

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_>) = \sigma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_>) = \frac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \tag{5.10}$$

である．導体表面は電場 $\boldsymbol{E}$ が 0 から有限の値に変る境目だから $\boldsymbol{E}$ は定義できない．そこで上式ではあくまで $\boldsymbol{r}_>$ を $\boldsymbol{r}$ と書かずに残した．(5.10)は，$\sigma(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_>)$ や $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_>)$ そのものについては何も教えないが，導体表面付近で必ず成り立つ関係として，重要である．なお，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}_>)$ や $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_>)$ は，外場だけでなく導体表面全体に誘起されたすべての表面電荷が点 $\boldsymbol{r}_>$ に作る場を重ね合わせた，実際にそこに存在する場であることを強調しておく．

例題 5.2

半径 a_1，a_2 $(a_1 > a_2)$ の 2 個の導体球を遠くに離して，細い導線でつないで，電荷 Q を与えた．導線上の電荷は無視できるとして，各球の電位，電荷，表面電荷密度，表面のすぐ近くの電場を求め，大小を比較しなさい．

［**解**］ 与えられた電荷 Q は両球の表面に分布するが，両球は十分離れているので，表面電荷密度 σ_1，σ_2 は一様であり，無限遠に対する電位は (4.40) で与えられるものと考えてよい．両球は導線でつながれているから電位 ϕ は等しくなければならない．よって，各球の電荷を q_1，q_2 とすると

$$\phi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 a_2}, \qquad q_1 + q_2 = Q \tag{5.11}$$

より，

$$q_1 = \frac{a_1 Q}{a_1 + a_2}, \quad q_2 = \frac{a_2 Q}{a_1 + a_2}, \quad \text{また} \quad \phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(a_1 + a_2)} \tag{5.12}$$

である．よって，面電荷密度は

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi a_1{}^2} = \frac{Q}{4\pi a_1(a_1 + a_2)}, \quad \sigma_2 = \frac{Q}{4\pi a_2(a_1 + a_2)} \tag{5.13}$$

したがって，表面のすぐ近くの電場の強さ E_1, E_2 は，(5.10) より

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi a_1 \varepsilon_0(a_1 + a_2)}, \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi a_2 \varepsilon_0(a_1 + a_2)} \tag{5.14}$$

である．これはもちろん (4.38) から求めてもよい．大小関係は，$a_1 > a_2$ より

$$q_1 > q_2, \quad \sigma_1 < \sigma_2, \quad E_1 < E_2 \tag{5.15}$$

である．これから推測できるように，つながった導体のすぐ外側の電場は，曲率半径が小さく尖った部分ほど大きい．

§5.5 対称性のよい導体の周りの静電場の例

ここで，対称性のよい場合の例として，図5.9のような，帯電していない内半径 a_1，外半径 a_2 の中空導体球の共通の中心に点電荷 $q\,(>0)$ がある場合の，空間のすべての点の電場を求めてみよう．中心に原点をもつ球座標で考える．対称性より，電場は中心の周りに球対称であるから，

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(r)\,\boldsymbol{e}_r \tag{5.16}$$

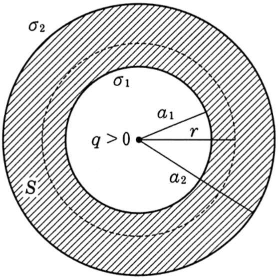


図5.9

である．原点に近い部分から順に考えていくと

（1） 中空部の，$r < a_1$ なる点では，§3.7の[例1]と同様の考察を点電荷に適用して

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{5.17}$$

である．

（2）　$a_1 < r < a_2$ なる点は導体内部だから，

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{5.18}$$

である．

（3）　ここで，$r = a_1$ なる内表面上の点の考察にもどると，ここでは電場が不連続だから $\boldsymbol{D}$ や $\boldsymbol{E}$ は定義できない．この表面には静電誘導で電荷が生じている．その表面電荷の総量を q_1 とすると，ガウスの法則より

$$\oint_{\text{導体内を通る面 S}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = q + q_1 = 0 \tag{5.19}$$

から，

$$q_1 = -q \tag{5.20}$$

である．このように，中空部に孤立した電荷が存在するときは，静電誘導で内表面にも電荷が現れる．対称性からこの電荷は一様な表面電荷密度で分布しているはずである．よって，その密度は

$$\sigma_1 = -\frac{q}{4\pi a_1{}^2} \tag{5.21}$$

である．

（4）　次に，$r = a_2$ なる外表面上の点でも，電場は不連続だから定義できないが，電荷密度はわかる．この外表面の電荷分布も対称性より一様のはずである．この導体はもともと帯電していないとしたから，外表面の全電荷 q_2 は内表面全体の電荷の符号を変えたものに等しくなければならない．つまり

$$q_2 = -q_1 = q \tag{5.22}$$

である．よって，表面電荷密度は

$$\sigma_2 = \frac{q}{4\pi a_2{}^2} \tag{5.23}$$

である．

（5） 最後に，$r > a_2$ なる球の外部の点では (5.16) とガウスの法則より

$$\oint_{\text{半径 } r \text{ の球面}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi r^2 D(\boldsymbol{r}) = q \tag{5.24}$$

である．よって

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{5.25}$$

であり，あたかも中心の点電荷 q の周りの導体球がない場合と同じように電場が広がっていることがわかる．

例題 5.3

上の例で，内表面の電荷密度 σ_1 を中空部の電場から求めなさい．

［**解**］ 図 5.10 のように，内表面上の点 $\boldsymbol{r}$ のすぐそばの中空部の点を $\boldsymbol{r}'$ とすると，(5.17) より，

$$\boldsymbol{D}(r) = \frac{q}{4\pi r'^2}\boldsymbol{e}_r \tag{5.26}$$

である．$\boldsymbol{r}'$ は導体表面のすぐ外側という意味では (5.10) の $\boldsymbol{r}_>$ に相当し，点 $\boldsymbol{r}$ の法線ベクトルは $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{e}_r$ だから，(5.10)，(5.26) より

$$\frac{q}{4\pi \boldsymbol{r}'^2}\boldsymbol{e}_r = \sigma(\boldsymbol{r})(-\boldsymbol{e}_r) \tag{5.27}$$

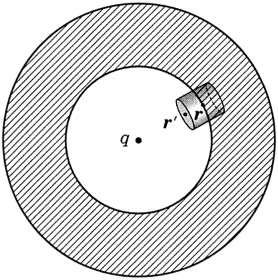


図 5.10

である．$\boldsymbol{r}'$ を内表面の半径 a_1 に等しいと置くと

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = -\frac{q}{4\pi {a_1}^2} \tag{5.28}$$

が得られる．これは (5.21) に一致する．このように，静電誘導で内表面に現れた電荷が作る場は互いに打ち消し合って空洞内の電場には全く寄与しないにもかかわらず，内表面の電荷とそのすぐ近くの電場との間には確かに基本的関係 (5.10) が成り立っている．

§5.6 鏡像電荷

いかなる場合でも，導体表面上の電荷分布がわかれば，クーロン電場の重ね合せから空間の電場を計算できる．しかし，導体表面上の電荷分布は，導体内部の電場をいたるところ0にするように配置されたものであり，外場や導体の形によって変化するので，容易にわかるものではない．しかし，ある種の対称性が残っている特殊な場合については，導体の周りの電場を知ることができ，さらにそれから逆に表面電荷分布を知ることさえできる．それには，まさに表面電荷が導体内部の電場を0にするように分布すること（あるいは，導体表面が等電位面であること）を積極的に利用する．

例として，図5.11のような，無限に広い導体表面から a だけ離れた点Aに点電荷 $q(>0)$ がある場合を考えよう．この電荷が作るクーロン電場は，導体内外の区別なく広がっている．たとえば，図の導体表面のすぐ内側の点B′では $\boldsymbol{E}_0'$ の向きを向いている．しかし，導体内ではその電場を感じて表面に集まった負の電荷がそれを打ち消すような電場を作っているはずである．いま，そのようにしてでき上がった表面電荷密度を $\sigma(\boldsymbol{r})$ としよう．その全体が点

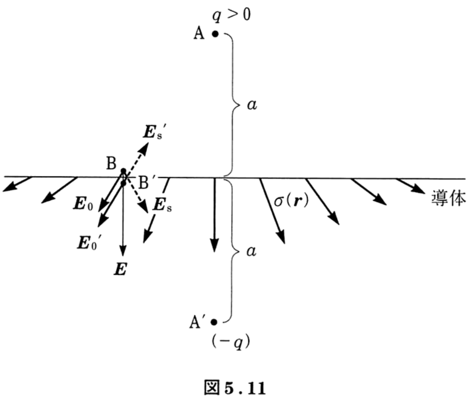


図5.11

B′に作っている電場 $\boldsymbol{E}_s$ は $\boldsymbol{E}_0'$ を打ち消しているのだから

$$\boldsymbol{E}_s' = -\boldsymbol{E}_0' \tag{5.29}$$

を満たしていなければならない．この $\sigma(\boldsymbol{r})$ が導体外に作っている電場はどうなっているであろうか．われわれはむしろこちらに興味がある．

表面電荷が点 B′のすぐ外側の点 B に作る電場は，表面に関して対称なはずだから，図のベクトル $\boldsymbol{E}_s$ のはずである．一方，電荷 q が点 B に作っている電場 $\boldsymbol{E}_0$ は

$$\boldsymbol{E}_0 \approx \boldsymbol{E}_0' \tag{5.30}$$

である．なぜなら A 点から見て B 点と B′点はほとんど同じ点だからである．したがって B 点に実際に存在している電場は重ね合せ

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_s \tag{5.31}$$

で与えられる．作図により，$\boldsymbol{E}$ は確かに導体表面に垂直な場になっていることがわかる．

導体外の任意の点での $\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r})$ を知って (5.31) の重ね合せを行えば，表面のごく近傍だけでなく導体の外側の空間全体の電場の様子を知ることも可能である．表面電荷分布が導体内に作る電場 $\boldsymbol{E}_s'$ をもう少しよくみると，(5.29) より，点 A に向かうベクトル（点 A に電荷 $-q$ があるときに生じる電場）である．一方，$\boldsymbol{E}_s$ は導体表面に関して $\boldsymbol{E}_s'$ と対称なベクトルであるから，A と対称な位置（鏡像の位置）A′に向かうベクトルであることになる．大きさも考えると，$\boldsymbol{E}_s$ はあたかも A′に電荷 $-q$ が存在したときに生じるであろう電場に一致する．よって，導体の外側の任意の点の電場は，点 A に存在する電荷 q と，点 A′に存在する仮想的な電荷 $-q$ がつくる電場の重ね合せに等し

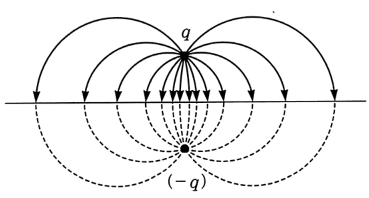


図 5.12

い．それを図示すると図 5.12 (実線部のみ) のようになる．A′ に仮想した電荷 $-q$ を**鏡像電荷**という．

鏡像電荷を使えば導体の外の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を式で表すことも簡単にできる．A を通り，導体表面に垂直な線を z 軸とし，表面上に原点をもつ座標で考えると，(3.19) より，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q(\boldsymbol{r}-a\boldsymbol{e}_z)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-a\boldsymbol{e}_z|^3} + \frac{-q(\boldsymbol{r}+a\boldsymbol{e}_z)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}+a\boldsymbol{e}_z|^3}$$
$$= \frac{q(\boldsymbol{r}-a\boldsymbol{e}_z)}{4\pi\varepsilon_0(r^2-2az+a^2)^{3/2}} - \frac{q(\boldsymbol{r}+a\boldsymbol{e}_z)}{4\pi\varepsilon_0(r^2+2az+a^2)^{3/2}} \tag{5.32}$$

である．特に，導体表面のすぐ近くの点の電場は，円筒座標 (ξ, φ, z) を用いると，

$$z \approx 0, \qquad r \approx \xi \tag{5.33}$$

だから

$$\boldsymbol{E}(\xi) = \frac{-aq}{2\pi\varepsilon_0(\xi^2+a^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_z \tag{5.34}$$

である．

例題 5.4

上の例で，導体表面に誘起されている表面電荷密度 $\sigma(\boldsymbol{r})$ を求めなさい．

［**解**］ (5.10) において (5.34) と $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_z$ を考慮すると，円筒座標で表した導体表面上の点 $\boldsymbol{r}(\xi, \varphi, z)$ の面電荷密度は

$$\frac{-aq}{2\pi\varepsilon_0(\xi^2+a^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_z = \frac{\sigma(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z \qquad \text{より} \qquad \sigma(\boldsymbol{r}) = \frac{-aq}{2\pi(\xi^2+a^2)^{3/2}} \tag{5.35}$$

である．

§5.7 孤立した導体の静電容量

孤立した任意の形の導体に電荷 q を与えたときの，無限遠を基準とする導体の電位 ϕ は q に比例する．周りの電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が関数形は同じ形のまま q に比例して強くなるからである．これを，逆に q が ϕ に比例する

$$q = C\phi \tag{5.36}$$

という形に書いたときの比例係数 C をその導体の**静電容量**という．静電容量は導体の形と大きさによって値が異なる．その次元，および SI 単位は

$$[C] = Q[\phi]^{-1} = M^{-1}L^{-2}T^2Q^2 :$$

$$\mathrm{C/V} = \mathrm{C^2{\cdot}s^2/kg{\cdot}m^2} = \mathrm{F} = \mathrm{farad}(\textbf{ファラッド}) \tag{5.37}$$

である．(2 行目の C は電荷の単位クーロン．) 静電容量 C も実用上重要な量なので，F という特別な単位が与えられている．C が静電容量とよばれるのは，C が大きいほど，導体の電位を上げずに多くの電荷を蓄えられるからである．なお，静電容量の単位として，pF（ピコファラッド）$= 10^{-12}$ F や，μF（マイクロファラッド）$= 10^{-6}$ F もよく用いられる．

例題 5.5

孤立した半径 a の導体球の静電容量を求めなさい．半径 1 m の導体球の容量はいくらか．

[**解**]　この導体球に与えられた電荷 q は表面に均一に分布するから，導体表面および内部の電位は (4.40) と同じで，

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{5.38}$$

である．よって，この球の静電容量は

$$C = \frac{q}{\phi} = 4\pi\varepsilon_0 a \tag{5.39}$$

である．半径 1 m の導体球の静電容量は

$$C = 1.11 \times 10^{-10}\ \mathrm{F} = 111\ \mathrm{pF} \tag{5.40}$$

である．なお，(5.38) を参照すると，

$$[\varepsilon_0] = [C][a]^{-1} = [C]L^{-1} \tag{5.41}$$

から，ε_0 の SI 単位は F/m でもあることがわかる．

§5.8　2 個の導体の静電容量

前節では 1 個の導体の静電容量を考えたが，2 個の導体 1，2 に電荷 q_1，q_2 を帯電させたときは，それぞれの電位 ϕ_1，ϕ_2 は，自分の電荷だけでなく他方の電荷にも依存する．ここでは応用上重要な場合として，図 5.13 のように，双方に大きさが同じで符号の異なる電荷

$$q_1 = q, \qquad q_2 = -q \tag{5.42}$$

を与えた場合のみを考える．この場合，無限遠を基準とする導体の電位 ϕ_1, ϕ_2 はともに q に比例する．理由は，孤立した導体の場合と同じで，周りの電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が関数形は同じままで，q に比例して強くなるからである．したがって，この 2 個の導体の電位差 V_{12} も q に比例する．

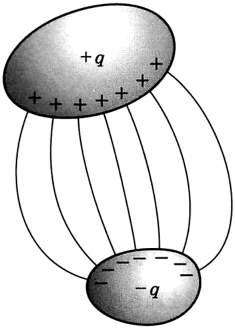


図 5.13

$$V_{12} = \phi_1 - \phi_2 \propto q \tag{5.43}$$

V_{12} は**電圧**ともよばれる．(5.43) を

$$q = CV_{12} \tag{5.44}$$

と書いたとき，C をこの導体対の静電容量という．C の値はそれぞれの導体の形状と両者の配置によって決まる．このような導体対を，正負の電荷を蓄える装置とみなすとき，それを**コンデンサー**という．C が大きいほど，導体間の電位差を上げずに多くの電荷を蓄えることができる．回路図ではコン

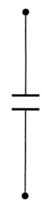


図 5.14

デンサーを図 5.14 のような記号で表す.

例題 5.6

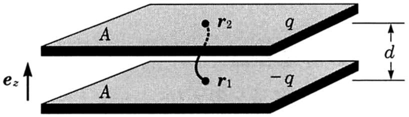


図 5.15

同じ形の平面導体を図 5.15 のように平行に配置したものを**平行板コンデンサー**という. この平面導体を**極板**という. 極板の面積を A, 間隔を d として, このコンデンサーの静電容量を求めなさい.

［解］ 上の極板に電荷 q, 下の極板に電荷 $-q$ を与える. d が十分小さければ, 縁辺部を除き電荷密度 σ は一様になることが知られている. また, 面の間の空間で $\boldsymbol{D}$ は極板に垂直である. このとき, z 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z$ を図のように定めると

$$\boldsymbol{D} = -D\boldsymbol{e}_z = -\sigma\boldsymbol{e}_z \tag{5.45}$$

だから

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z \tag{5.46}$$

である. したがって, 両極板間の電位差は

$$V_{21} = -\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{z_1}^{z_2} -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d \tag{5.47}$$

である. ただし

$$\boldsymbol{e}_z\cdot d\boldsymbol{r} = dz \tag{5.48}$$

を用いた. よって, この平行板コンデンサーの静電容量は

$$C = \frac{q}{V_{21}} = \frac{\sigma A}{\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{5.49}$$

である.

§5.9 起電力とコンデンサーの接続

これまで，電荷 q に力をおよぼすものとして，別の電荷が作る静電場（クーロン電場）$\boldsymbol{E}$ のみを暗黙に考えてきたが，それ以外にも電荷を動かせるものがある．電池(化学反応)，熱起電力，力学的な運搬，誘導起電力等である．このうち，誘導起電力だけは，第 9 章で学ぶように，マクスウェル方程式のひとつに含まれるが，それ以外はマクスウェル方程式のみで扱える範囲を超えた現象である．

これらの現象が電荷を運ぶはたらきを**起電力**という量で表す．起電力とは，クーロン力以外の力が電荷 q を動かしてする仕事を q で除したものである．代表的な起電力の源は電池(一般に定電圧源)で，これは，端子間の電位差が常に決まった値（起電力できまる値）になるように電荷を送り出す装置である．回路図では定電圧源を図 5.16 のような記号で表す．起電力は**電源電圧**または単に**電圧**ともよばれる．

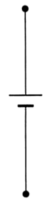


図 5.16

起電力の決まった電源を，抵抗を介してコンデンサーの両極板につなぐと，極板に電荷が供給され，極板間の電位差が起電力の値に等しくなる．

コンデンサーの並列接続

容量 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ のコンデンサーを図 5.17 のようにまとめて回路の他の部分につなぐことを**並列**につなぐという．このときの全体の静電容量を求めよう．

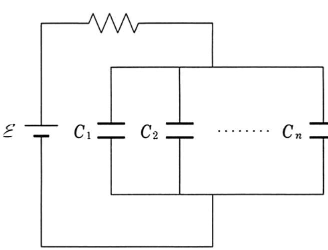


図 5.17

両端を起電力 $\mathcal{E}$ の電源につないだときの各 C_i の両極板の電荷をそれぞれ $q_i, -q_i\,(i=1,\cdots,n)$ とする．両極の電位差はすべて $\mathcal{E}$

である．電荷の総和は

$$Q = q_1 + \cdots + q_n = C_1\mathcal{E} + \cdots + C_n\mathcal{E} = (C_1 + \cdots + C_n)\mathcal{E} \tag{5.50}$$

である．一方，この場合の合成(静電)容量を C とすると

$$Q = C\mathcal{E} \tag{5.51}$$

だから

$$C = C_1 + \cdots + C_n \tag{5.52}$$

である．

コンデンサーの直列接続

容量 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ のコンデンサーを図5.18のようにまとめて回路の他の部分につなぐことを**直列**につなぐという．両端を起電力 $\mathcal{E}$ の電源につないだときの C_1 の両極板の電荷を $q, -q$ とすると，C_2 の極板の電荷も $q, -q$ である．これは，C_1 と C_2 を結んでいる導線の部分はもともと帯電していなかったので，C_1 の負の極板に $-q$ が集まると，C_2 の正の極板には $+q$ が残されるためである．同様に，すべてのコンデンサーの両極板の電荷は $q, -q$ である．そうすると各 C_i の両端の電位差は $V_i = q/C_i$ であるから

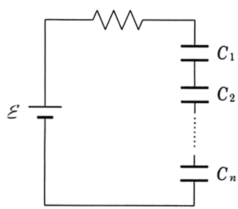


図5.18

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C_1} + \cdots + \frac{q}{C_n} \tag{5.53}$$

である．一方，この場合の全体の合成容量を C とすると

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} \tag{5.54}$$

だから

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_n} \tag{5.55}$$

である．よって

$$C = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \cdots + \dfrac{1}{C_n}} \tag{5.56}$$

である．

演習問題

［1］ 導体表面のある位置のすぐ外側で電場の強さが $E = 1 \times 10^4$ N/C であった．導体表面のその部分の電荷密度を求めなさい．

［2］ 地球（半径 6.38×10^3 km）と太陽（半径 6.96×10^5 km）を導体と扱って，孤立した球としての静電容量を求めなさい．

［3］ 面間隔 1 mm の平行板コンデンサーの容量を $C = 1$ F とするためには，面積を何 m^2 としなければならないか．

［4］ 面間隔 10 cm の平行板コンデンサーの間の電場で，電子が落下しないように支えるのに必要な極板間の電圧は何 V か．陽子の場合はどうか．

［5］ 半径 a と $b(> a)$ の同心導体球殻の，導体対としての静電容量を求めなさい．

［6］ 半径 a と $b(> a)$ で長さ $l(\gg b)$ の 2 個の導体円筒（厚さは無視できるものとする）が，両端がそろい中心軸が一致している．これらに起電力 $\mathcal{E}$ の電源をつないで外側の円筒に対する内側の円筒の電位を $\mathcal{E}$ としたときの，円筒間の空間の電場を求めなさい．

［7］ 前問の導体円筒対の静電容量を求めなさい．また，円筒の隙間の間隔 $d = b - a \ll a$ のときは，d と片方の円筒の側面積 A を用いて，$C \approx \varepsilon_0 A/d$ と近似できることを示しなさい．

［8］ 十分広い導体平面から a だけ離れた位置に点電荷 q がある．

（a） 点電荷が受ける力を求めなさい．

（b） 表面電荷の総和は $-q$ に等しいことを示しなさい．

［**9**］ 一様な電場 $\boldsymbol{E}_0 = E_0 \boldsymbol{e}_z$ の中に帯電していない導体球を置いた．導体表面に誘起される面電荷密度と周りの電場を求めなさい．

6 定常電流と直流回路

これまでは，静的な電場のみを考えてきた．本章では，電荷が動いている場合を扱う．ただし，電荷の空間的な流れの様子が時間的に変化しない場合を考える．そのような流れを定常電流という．定常電流は直流電源につながれた導体の中に生じる．導体内部に生じた電場を電荷が配置して打ち消すことを電源が妨害するため，電場が存在し続け，一定の電流が流れ続けるのである．

§6.1 電 流

正の電荷が図 6.1 のような線状の導体（導線）を流れているとする．その導体の断面を単位時間当り通り抜ける電荷量を**電流**という．

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (6.1)$$

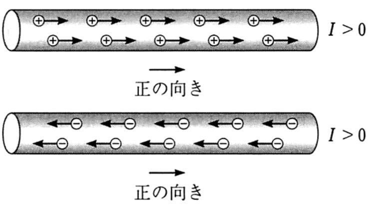


図 6.1

電流はスカラー量であるが，流れには向きがある．それを表すには，図 6.1 のように，あらかじめ正の向きを指定し，その向きに正の電荷が流れているとき，あるいはその逆の向きに負の電荷が流れているとき

$$I > 0 \qquad (6.2)$$

とする.

電流の次元と SI 単位は

$$[I] = QT^{-1}: \quad \mathrm{C/s = A = ampere}\ (\textbf{アンペア}) \tag{6.3}$$

である. A は電磁気学全体の基本単位である. 1 A の大きさは, 磁気的な力を介して定義されているので, もう少し先にならないと定義できないが, それを電子の流れに換算すると, 1 秒間に約 6.24×10^{18} 個の電子の流れである.

§6.2 電流密度

現実の導線には太さがあるから, その中を流れる電流の 3 次元的な流束密度, すなわち**電流密度**の場 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ を考えることができる. 電流密度は, 導体を流れる電流の場合だけでなく, 空間に広がって流れている任意の電荷の流れを表すことができる. いまは定常電流を考えているから, 次々に同じ量の電荷が供給され続けており, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ は時間に依存しない.

実際に電荷を運んでいるものは図 6.2 のように電子やイオンのような微粒子であるが, これを粗視化して扱う. 川の流れを解析するのに水分子の運動を考えず, 連続的な流体としての水の流れを考えるのと同様である.

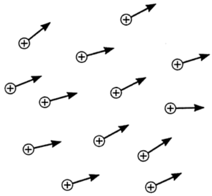


図 6.2

正か負のいずれか一種類の電荷をもった粒子だけが流れているときは, 電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ は粗視化した電荷密度の場 $\rho(\boldsymbol{r})$ と, 点 $\boldsymbol{r}$ 付近の流れの平均速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ を用いて (2.46)

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \tag{6.4}$$

で表される. $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ はマクロな移動の速度で, **ドリフト速度**とよばれる. ドリフト速度は衝突によって向きを変えながら進んでいる粒子の流れの平均の速度で, 個々の粒子の瞬間的な速度よりはるかに遅い. 負の電荷の流れの場合

は $\rho(\boldsymbol{r}) < 0$ だから，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ と向きが逆になる．

一般に，正負の電荷が存在してそれぞれ密度 $\rho_+(\boldsymbol{r})$，$\rho_-(\boldsymbol{r})$，ドリフト速度 $\boldsymbol{v}_+(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{v}_-(\boldsymbol{r})$ で流れているときは，電流密度ベクトルの場は

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \rho_+(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}_+(\boldsymbol{r}) + \rho_-(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}_-(\boldsymbol{r}) \tag{6.5}$$

である．一方，正味の電荷密度は

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_+(\boldsymbol{r}) + \rho_-(\boldsymbol{r})\ ; \quad \rho_+(\boldsymbol{r}) > 0, \quad \rho_-(\boldsymbol{r}) < 0 \tag{6.6}$$

である．普通これらの流れは共通の電場を受けて生じているから，$\boldsymbol{v}_+(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{v}_-(\boldsymbol{r})$ は互いに逆向きである．よって，(6.5) は実効的に加算になっており，一方 (6.6) は実効的に減算になって打ち消し合っている．固体の導体に電流が流れている場合は，正イオンと自由電子の数密度は等しいから

$$\rho_+(\boldsymbol{r}) = -\rho_-(\boldsymbol{r}) \tag{6.7}$$

である．また，正イオンは動かないから

$$\boldsymbol{v}_+(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{6.8}$$

である．よって

$$\rho(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \rho_-(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}_-(\boldsymbol{r}) \tag{6.9}$$

である．これが，電気的に中性の導体中を，負の電荷をもつ電子によって運ばれる電流が流れているという状態である．

マクロな電磁気学では，導体中を流れる電流は，仮想的な正の電荷が運ぶと考えてもよい．(ただし，ホール効果のような，電流を運んでいる電荷の正負によって効果が異なる現象もある．)

電流密度の次元と SI 単位は

$$[j] = [\rho][v] = QL^{-3}LT^{-1} = QT^{-1}L^{-2}: \quad \mathrm{A/m^2} \tag{6.10}$$

である．

一般論にもどろう．空間内に任意の無限小の面素 dS (図 6.3) を考え，法線の向き $\boldsymbol{n}$ を選ぶ．

$$d\boldsymbol{S} = dS\,\boldsymbol{n} \qquad (6.11)$$

この面素を $\boldsymbol{n}$ の向きに，単位時間に通り抜ける電荷の量（流束）が電流である．(2.48)より，この微小面を流れる電流は

$$dI = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (6.12)$$

である．

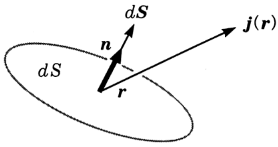


図 6.3

図 6.4 のような有限の広さの面Sを貫いて流れる電流は，その面を細かく分けた面素を貫いて流れる電流の和（積分）で与えられ

$$I = \int_S dI = \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (6.13)$$

である．

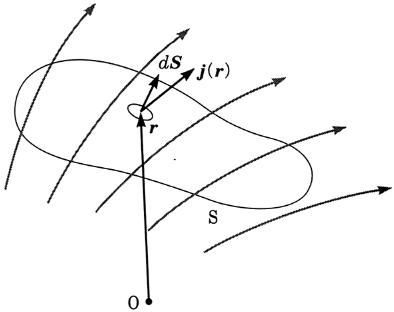


図 6.4

電流には，このほかに面に沿って流れるものや曲線に沿って流れるものが考えられる．図 6.5 のような厚さのない面上に分布した面電荷密度 $\sigma(\boldsymbol{r})$ の電荷が速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ で流れているとする．このとき，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ に垂直な無限小線分 dl を横切って無限小時間 dt の間に流れる電荷 dq は，面

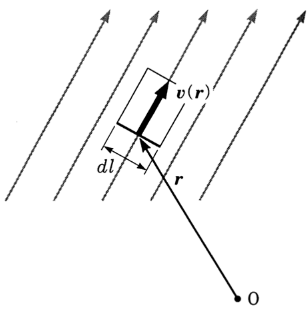


図 6.5

積 $dl \times v(\boldsymbol{r})\,dt$ に含まれる電荷の量に等しいから

$$dq = \sigma(\boldsymbol{r})\,dl\,v(\boldsymbol{r})\,dt \tag{6.14}$$

である．よって，単位時間当りこの線分を横切って流れる電荷，すなわち，電流は

$$dI = \frac{dq}{dt}$$
$$= \sigma(\boldsymbol{r})\,v(\boldsymbol{r})\,dl \tag{6.15}$$

である．ここで，**面電流密度ベクトル**

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \sigma(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \tag{6.16}$$

を定義すると，(6.15) は $|\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})| = J(\boldsymbol{r})$ を用いて

$$dI = J(\boldsymbol{r})\,dl \qquad \text{あるいは} \qquad J(\boldsymbol{r}) = \frac{dI}{dl} \tag{6.17}$$

である．面電流密度の次元と SI 単位は

$$[J] = [I]L^{-1} = QT^{-1}L^{-1}: \quad \mathrm{A/m} \tag{6.18}$$

である．

なお，太さのない曲線上のある点を単位時間に流れる電荷の量は電流そのものであるから，“線電流密度”という概念はない．また，面電流密度で表される電流も，太さのない曲線を流れる電流も，面積のない部分を貫いて流れているから，（体積）電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ として見ると無限大に発散している．

例題 6.1

銅の自由電子は原子 1 個につき 1 個である．いま，断面積が 1 mm^2 の銅線を 0.1 A の電流が流れている．ドリフト速度を求めなさい．ただし銅の質量密度は 8.93×10^3 kg/m^3，銅原子の原子量は 63.5，アボガドロ数を 6.02×10^{23}，電子 1 個の電荷を $-e = -1.60 \times 10^{-19}$ C とする．

［**解**］ 銅線中の自由電子の数密度は

$$n = \frac{8.93 \times 10^3}{63.5 \times 10^{-3}/(6.02 \times 10^{23})} = 8.47 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}} \tag{6.19}$$

よって，電荷密度は

$$\rho = -en = -1.60 \times 10^{-19} \times 8.47 \times 10^{28} = -1.35 \times 10^{10}\ \mathrm{C/m^3} \tag{6.20}$$

であり，したがってドリフト速度は

$$v = \frac{0.1}{1 \times 10^{-6} \times 1.35 \times 10^{10}} = 7.41 \times 10^{-5}\ \mathrm{m/s} \tag{6.21}$$

である．

§6.3　オームの法則

第5章で学んだように，導体に外から電場をおよぼすと，ある時間の後には（理想的な導体の場合は瞬時に）必ず全体が等電位になるように表面電荷が配置する．一方，一定の起電力をもつ電源は，その出力端子を決まった電位に保とうとする．よって，理想的な導体を理想的な電源につなぐということは矛盾を引き起こす．

図6.6のように，現実の導体を現実の電源につなぐと，静的な場合と異なり，導体内には電場が存在し続ける．このため自由電子は電源の負の極から正の極に向けて力を受け，電流が流れ続ける．一方，電源の端子電圧は起電力よりも低くなっている．導体中を流れている自由電子は真空中の電子のように加速度運動をするのではなく，熱振動しているイオンに衝突して運動が妨げられ，マクロに見るとある平均的なドリフト速度で移動する．正の極にたどりついた電子は，起電力によって電源の内部を負の極まで運ばれる．このため，電子は正の極付近にとどまっ

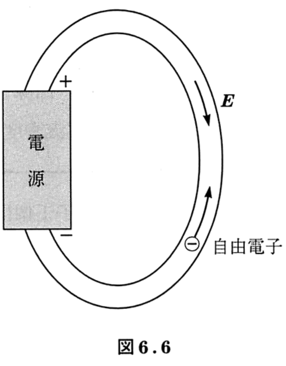


図6.6

て導体中の電場を打ち消すように分布することができずに流れ続ける．巨視的な電磁気学では，仮想的な正の電荷が，電源の正の極から導体を通って負の極にたどりつき，起電力によって電源の内部を負の極から正の極に運ばれ，電流が流れ続けると考えてもよい．導線に電源をつないだ直後の導線内の電場は導線に沿っていないが，その電場に沿って移動した電荷が導線表面に蓄積し，導線内の電場を導線に沿ったものにする．

電気抵抗

電流が流れている導体の両端の電位差のことも**電圧**という．電圧 V と流れている電流 I の間には比例関係があることが実験的に知られている．

$$I = \frac{V}{R} \tag{6.22}$$

これを**オームの法則**という．ドイツのオーム（G. S. Ohm，1787-1854）が発見した法則である．R をその導体の**抵抗値**（普通は単に**抵抗**あるいは電気抵抗）という．R は物質の種類と形で異なる．R の次元と SI 単位は

$$[R] = [V][I]^{-1}: \quad \mathrm{V/A} = \Omega = \mathrm{ohm}(\textbf{オーム}) \tag{6.23}$$

である．導体の電気を通す性質ではなくその抵抗値を利用するとき，その導体そのもののことも，単に抵抗とよぶ．つまり「抵抗 R」とは，「抵抗値 R をもつ導体」という意味である．回路図では，抵抗は図 6.7 の記号で表す．いろいろな値の抵抗値をもつ抵抗が製造され市販されている．電気回路のはたらきを考えるときは，抵抗のない導体の線も考える．これを理想的な**導線**といい，それで抵抗同士や電源をつなぐと考える．実際の回路では銅線（半導体集積回路（IC）などでは金線）を用いてつなぐが，通常の場合はこのような現実の導線も抵抗がないとして回路の性質を解析してよい．



図 6.7

オームの法則はまた，抵抗 R に電流 I を流すとその両端の電位差が

$$V = IR \tag{6.24}$$

になる，とも解釈できる．これを**電圧降下**という．あるいは，電圧 V をかけたとき電流 I が流れるような抵抗は

$$R = \frac{V}{I} \tag{6.25}$$

である，とも解釈できる．このように見方を変えてオームの法則を解釈することは，実用的な回路のはたらきを正しく理解するときに役立つ．

電源の内部抵抗

図 6.8 のように，起電力 $\mathcal{E}$ の通常の電源に抵抗 R をつないだとき，電源の出力端子の電圧を V とすると，$V < \mathcal{E}$ である．これは，理想的でない電源には**内部抵抗**があるためである．内部抵抗を r とすると，V は内部抵抗 r による電圧降下 rI の分だけ $\mathcal{E}$ より低い．

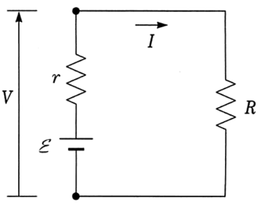


図 6.8

$$V = \mathcal{E} - Ir \tag{6.26}$$

このとき流れる電流は，

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \tag{6.27}$$

だから，これと（6.22）から，

$$V = \frac{\mathcal{E}R}{R + r} \tag{6.28}$$

である．抵抗 R が小さいほど V は低い．

例題 6.2

起電力 10 V の直流電源に 10 Ω の抵抗をつないだところ，0.98 A の電流が流れた．電源の内部抵抗を求めなさい．

［**解**］（6.27）を参照して

$$0.98 = \frac{10}{10 + r} \quad より \quad r = \frac{10}{0.98} - 10 = 0.20\,\Omega \tag{6.29}$$

抵 抗 率

一様な導体を図6.9のような長さ l，断面積 A の円筒形に切り出し，l や A が異なる場合について測定してみると，その抵抗は l に比例し，A に反比例する．

$$R = \rho\frac{l}{A} \tag{6.30}$$

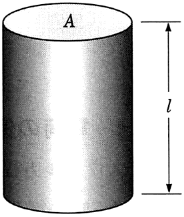


図6.9

比例係数 ρ はその物質固有の量（ただし，含まれている不純物や温度によって変る）で，**抵抗率**あるいは**比抵抗**という．抵抗率の次元と SI 単位は

$$[\rho] = [R]L：\quad \Omega\cdot\mathrm{m} \tag{6.31}$$

である．その逆数

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \tag{6.32}$$

を**電気伝導率**あるいは**電気伝導度**という．電気伝導率の次元と SI 単位は

$$[\sigma] = [\rho]^{-1}：\quad \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1} \tag{6.33}$$

である．$\rho(\sigma)$ の物質による値の違いは著しく，金属では ρ は非常に小さいが，水晶などの絶縁体では非常に大きい．具体例を表6.1に示す．(半金属と半導体の区別は電気伝導率による違いというよりは，物質の電子の状

表 6.1　種々の物質の抵抗率（20°C）

分　類	物　質	抵抗率（Ω·m）
導　体	銀	1.59×10^{-8}
	銅	1.72×10^{-8}
	アルミニウム	2.82×10^{-8}
	タングステン	5.6×10^{-8}
	ニクロム	1.50×10^{-6}
半金属	炭素	3.5×10^{-5}
半導体	珪素など	$10^{-1}\sim10^{3}$
絶縁体	ガラス	$10^{10}\sim10^{14}$
	融溶石英	7.5×10^{17}

態による分類で，それを理解するには固体物理学が必要である．）

例題 6.3

半径 0.5 mm，長さ 10 m 銅線の抵抗を求めなさい．

［解］

$$R=\frac{1.72\times10^{-8}\times10}{\pi(0.5\times10^{-3})^2}=2.18\times10^{-1}\,\Omega$$

§6.4　電荷の保存則

マクスウェル方程式と並ぶ電磁気学の基本法則に**電荷の保存則**がある．

“正味の電荷（正と負の電荷が打ち消し合った残りの電荷）は

生成も消滅もしない”

という法則である．これは，物理法則の中でも，最も高精度に確認されている法則のひとつである．これを式で表そう．

いま，空間に任意の閉曲面 S で囲まれた領域 V を考える（図 6.10）．この中の電荷の総量は，電荷密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ とすると，

$$\int_V \rho(\boldsymbol{r})\,dV \qquad (6.34)$$

である．これが消えてなくなることはない，というわけだから，もしこの総量に変化があったとすると，この領域から外へ出ていっただけのはずである．

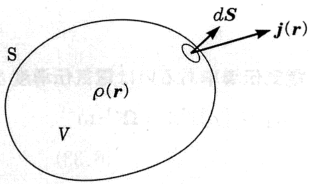


図 6.10

出ていくためには電荷が移動しなければならないが，電荷の動きは電流密度ベクトル $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ で表される．表面 S から流れ出る電荷の総量は

$$\oint_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (6.35)$$

である．これを用いると，電荷の保存則を，「ある空間内の電荷の総量の増減

は移動による増減しかありえない」という意味そのままに

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}}\rho(\boldsymbol{r})\,dV = -\oint_{\mathrm{S}}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (6.36)$$

と表すことができる．(6.36)左辺の時間微分はV内の電荷が増加したときに正であり，(6.35) は電荷が外に出て行ったとき正だから，(6.36) の右辺には負号がつくことになる．(6.36)は電荷に限らず，連続的に分布する物理量の保存則を表す重要な式である．

§6.5　定常電流とキルヒホフの第1法則

定常電流回路に電荷の保存則を適用すると，実用上重要な**キルヒホフの第1法則**が得られる．定常電流回路は電流がいたるところよどむことなく流れて，流れの様子が時間的に変化しないような回路であり**直流回路**ともいわれる．このような回路の任意の部分，たとえば，図6.11のようなT字型に分岐した部分を仮想的な閉曲面で切り取ってみよう．i 番目の断面の断面積を A_i，外向きの法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_i$ とし，流れる電流の密度を一様で $\boldsymbol{j}_i$ とすると，(6.36) の右辺は

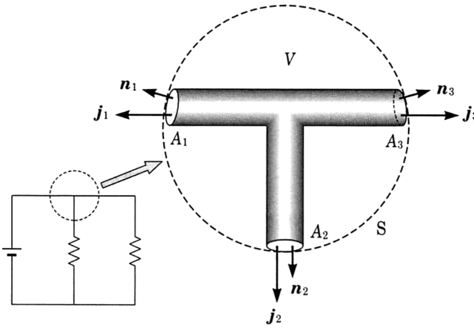


図6.11

$$-\oint_{\mathrm{S}}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot dS = -\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}_i\,A_i = -\sum_{i=1}^{3}I_i \qquad (6.37)$$

となる．I_i は各断面を流れ出る電流である．一方，いまは定常流を考えてい

るからSに囲まれる領域内の総電荷は変化しない．つまり（6.36）の左辺は0である．よって，

$$\sum_{i=1}^{3} I_i = 0 \tag{6.38}$$

である．これがキルヒホフの第1法則である．定常電流回路の節点(分岐点)から流れ出る電流の総和は0であることを主張する法則である．

§6.6　キルヒホフの第2法則

回路に関するもうひとつの重要な法則に，**キルヒホフの第2法則**がある．これは，閉じた回路と起電力に関する法則である．

すでに学んだように，起電力とは，クーロン力以外の電荷を運ぶ力のはたらきを，静電ポテンシャルと同じ次元の量で表したものである．いま，端子A，Bをもつ電源の起電力$\mathcal{E}$を，形式的に

$$\mathcal{E} = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{E}_e \cdot d\boldsymbol{r} \tag{6.39}$$

と書くことにする．この式の右辺が場の式として物理的に意味があるのは，$\boldsymbol{E}_e$が第9章で学ぶ誘導電場の場合だけであるが，ここでは，電池などの電源についても形式的に“電場”$\boldsymbol{E}_e$を用いて（6.39）のように書けるものとする．

図6.12のような電源A，Bの端子に何もつながれていないとき，正電荷がBからAに運ばれて(実際には電子がAからBに運ばれて)，Aには正の電荷が，Bには負の電荷がたまっている．この電荷によるクーロン場が起電力をちょうど打ち消して，それ以上の電荷の動きが抑制されている．いま，図6.13のように，この電源に抵抗の端子C，Dをつなぐと，外側の回路ACDBにはクーロン電場しか存在しないから，これに沿って電流が流れる．これによって端子Aの電荷が減少すると，クーロン場による抑制がわずかにゆるみ，電源の起

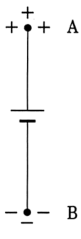


図6.12

電力が新たな電荷を供給することが可能になって，定常的に電流が流れ続ける．電源の内部抵抗を無視すると，流れる電流は当然

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \qquad (6.40)$$

である．

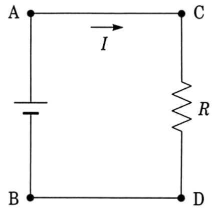


図 6.13

一般に図 6.14 のような回路の中の任意の閉回路を考えると，そこに起電力 $\mathcal{E}_i$ $(i = 1, \cdots, m)$，と抵抗 R_j $(j = 1, \cdots, n)$ があって，抵抗にそれぞれ電流 I_j $(j = 1, \cdots, n)$ が流れていれば，

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_j I_j R_j \qquad (6.41)$$

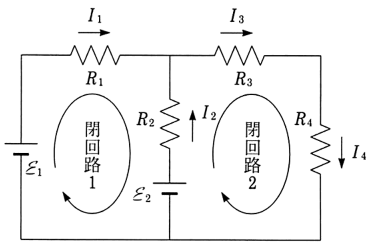


図 6.14

が成り立つ．ただし，回路を一回りする向きはあらかじめ決めておき，電源が電流を送り出す向きとその向きが一致するときは $+\mathcal{E}_i$，逆のときは $-\mathcal{E}_i$ とする．また，電流についてはそれぞれあらかじめ仮り流れの向きを決めておき，それが別に決めた回路を回る向きと一致するとき $+I_i$，反対向きのとき $-I_i$ とする．これをキルヒホフの第 2 法則という．たとえば，図 6.14 の電流の仮の向きを図のように定めると，閉回路 1 については

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2 \qquad (6.42)$$

が成り立ち，閉回路 2 については

$$\mathcal{E}_2 = I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4, \qquad I_3 = I_4 \qquad (6.43)$$

が成り立つ．このため，**起電力**も素子の両端の**電位差**も**電圧**とよばれる．

例題 6.4

起電力 $\mathcal{E}_1$, 内部抵抗 r_1 の電源と，起電力 $\mathcal{E}_2$, 内部抵抗 r_2 の電源と，抵抗 R を図 6.15 のようにつないだとき，抵抗に流れる電流 I を求めなさい．

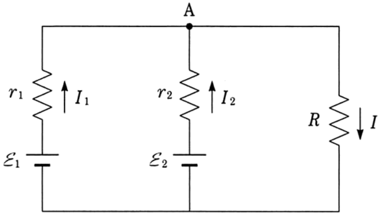


図 6.15

［**解**］ それぞれの電源を流れる電流を I_1, I_2 とし，その正の向きを仮に図の矢印の向きとする．また，I の正の向きも仮に図の矢印のように定めると，キルヒホフの第 1 法則を分岐点 A に適用して

$$I = I_1 + I_2 \tag{6.44}$$

また，それぞれの電源と抵抗 R を通る回路にキルヒホフの第 2 法則を適用して

$$\mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR, \qquad \mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + IR \tag{6.45}$$

である．これを解くと

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_1 + \mathcal{E}_2 r_2}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R} \tag{6.46}$$

である．明らかに $I > 0$ だから I は図の矢印の向きに流れる．

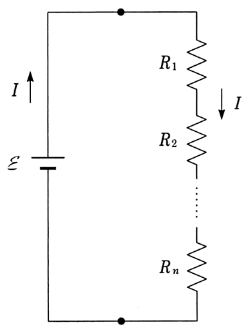


図 6.16

抵抗の直列接続

キルヒホフの第 1 法則，第 2 法則から，複数の抵抗を接続したときの全体の合成抵抗について簡単な法則を導くことができる．

まず，抵抗 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ を図 6.16 のようにまとめて回路の他の部分に接続した場合を**直列**

接続という．この場合，キルヒホフの第1法則から，すべての抵抗に同じ電流 I が流れる．さらに，第2法則からこれらの抵抗における電圧降下が電源の起電力に等しくなければならない．よって

$$\mathcal{E} = I(R_1 + R_2 + \cdots + R_n) \tag{6.47}$$

である．一方，この場合の合成抵抗を R とすると

$$\mathcal{E} = IR \tag{6.48}$$

だから

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \tag{6.49}$$

である．

抵抗の並列接続

抵抗 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ を図6.17のようにまとめて回路の他の部分に接続した場合を**並列接続**という．この場合，電源とひとつの抵抗 R_i だけを通る閉回路を考えるとキルヒホフの第2法則から

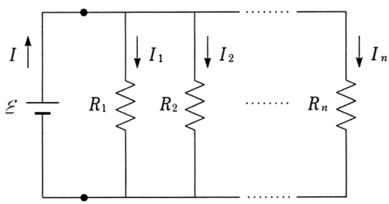


図6.17

$$\mathcal{E} = IR_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.50}$$

である．さらに，キルヒホフの第1法則から，各抵抗にながれる電流 I_i の和は電源から供給される電流 I に等しい．よって

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \cdots + I_n \\ &= \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E}}{R_2} + \cdots + \frac{\mathcal{E}}{R_n} \\ &= \mathcal{E}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right) \end{aligned} \tag{6.51}$$

である．一方，この場合の合成抵抗を R とすると

$$\mathcal{E} = IR \longrightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} \tag{6.52}$$

だから

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \tag{6.53}$$

すなわち

$$R = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \cdots + \dfrac{1}{R_n}} \tag{6.54}$$

である．

§6.7　場の関係としてのオームの法則

オームの法則を，場（位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数）の関係式として表現することができる．抵抗内の点 $\boldsymbol{r}$ の抵抗率（電気伝導率）の場を $\rho(\boldsymbol{r})\,(\sigma(\boldsymbol{r}))$，電場の強さを $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，電流密度を $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ とする．等方的な物質では，$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に平行である．いま，図6.18のように，点 $\boldsymbol{r}$ の周りに，側面が $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に平行な微小直円柱を考える．その断面積を $\varDelta A$，高さを $\varDelta l$ とする．上下面間の電位差は

$$\varDelta V = E(\boldsymbol{r})\varDelta l \tag{6.55}$$

で，断面 $\varDelta A$ を流れる電流は

$$\varDelta I = j(\boldsymbol{r})\varDelta A \tag{6.56}$$

である．この円柱の抵抗は（6.30）より

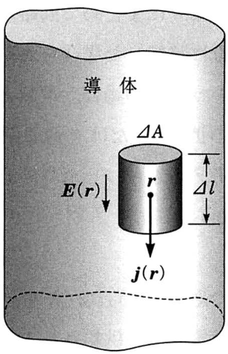


図6.18

$$R = \rho(\boldsymbol{r})\frac{\varDelta l}{\varDelta A} \tag{6.57}$$

であるから，オームの法則

$$\varDelta I = \frac{\varDelta V}{R} \tag{6.58}$$

の両辺に（6.55），（6.56），（6.57）を代入すると

$$j(\boldsymbol{r})\varDelta A = \frac{E(\boldsymbol{r})\varDelta l}{\rho(\boldsymbol{r})\dfrac{\varDelta l}{\varDelta A}} \qquad \text{よって} \qquad j(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r})}E(\boldsymbol{r}) \tag{6.59}$$

である．向きも含めて表すと

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\rho(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sigma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{6.60}$$

となる．これが，場の関係式としてのオームの法則である．

§6.8 ジュール熱

抵抗値が 0 でない導体，すなわち抵抗に電流を流すと，熱が発生する．白熱電球やニクロム線ヒーターはこの現象を積極的に利用したものである．

図 6.19 のように，抵抗 R の A 端の電位を V_A，B 端の電位を V_B とし，一端 A から他端 B に電流 I が流れているとする．無限小時間 dt の間に A 端に流れ込む電荷は

$$dq = I\,dt \tag{6.61}$$

である．定常電流の場合，B 端からも同じ量の電荷が流れ出している（キルヒホフの第 1 法則）．

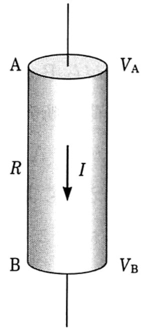


図 6.19

この現象は，図 6.20 のように，真空中で平板電極 A，B 間の電位を V_A，V_B に保って，その間の電場で電荷 q を加速する場合とは異なる．真空中では，dq は等加速度運動をしながら電極 B に達する．電極 A の位置で静止（運動エネルギー 0）の状態であったとすると，電極 B に達したときの運動エネルギーは，$q(V_A - V_B)$ に等しい．これは，q が電極 A の

位置にあるときのポテンシャルエネルギー qV_A が，電極Bの位置では qV_B に下がり，その差が運動エネルギーに変化したためである．電極の間の真空はもちろん温度が上昇することはなく，電荷が衝突する電極Bの温度が上がる．導体中を流れる電荷の場合は，AB間のすべての部分の温度が上昇する．しかも，B端付近の電荷のドリフト速度の大きさは，その付近の断面積に反比例する．

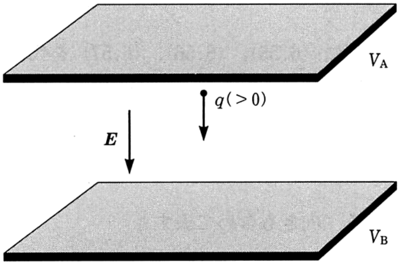


図6.20

この現象は次のように考えることができる．真空中と違い，抵抗のある導体を流れる自由電子は，物質中の熱振動している原子や不純物と絶えず衝突しながらBからAへ流れている．あるいは，図6.21のように，仮想的な正の電荷が衝突によってエネルギーを失いながら，AからBの方へ流れていると考えてもよい．つまり，真空中の電極Bに起こることがあらゆる部分で起こっていると考えられる．いま，正の電荷 $q(>0)$ が流れているとして考えると，導体のA端で電荷がもっていたポテンシャルエネルギー qV_A とB端でのポテンシャルエネルギー qV_B の差 $V_A - V_B$ は，途中で熱に変ることになる．

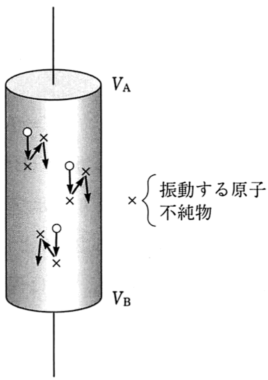


図6.21

このようなエネルギー変換が本当に

起こっているかどうかは定量的な実験をしてみなければわからないことであるが，英国のジュール（J. P. Joule, 1818 - 1889）は実際に測定を行い，電気的エネルギーと熱とが同等であることを示した．有名な力学的エネルギーと熱の同等性を証明した実験より前に行われた実験である．

これにより．抵抗の中で時間 dt の間に失われて熱（**ジュール熱**という）に変るエネルギーは，

$$dW = dq\,V_A - dq\,V_B$$
$$= I\,dt\,V_A - I\,dt\,V_B = I(V_A - V_B)\,dt \qquad (6.62)$$

である．よって，単位時間に失われるエネルギーは

$$P = \frac{dW}{dt} = I(V_A - V_B) = I \cdot IR = I^2R \qquad (6.63)$$

である．これを**電力**という．抵抗による電圧降下を V とすると

$$V = V_A - V_B \qquad (6.64)$$

だから（6.22）より

$$P = \frac{V^2}{R} = VI \qquad (6.65)$$

とも書ける．

電力の次元と SI 単位は

$$[P] = [VI][t]^{-1}: \quad \mathrm{J/s = W = watt} \text{（ワット）} \qquad (6.66)$$

である．

例題 6.5

起電力 $\mathcal{E}$，内部抵抗 r の電源に抵抗 R をつないだとき，抵抗の中で熱に変る電力 P を求めなさい．R の大きさを変えたとき，P が最大になるような R の値を求めなさい．

［**解**］　回路を流れる電流は $I = \mathcal{E}/(R + r)$ だから

$$P = RI^2 = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} \qquad (6.67)$$

よって，これが最大になるのは

$$\frac{d}{dR}\frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2[(R+r)^2 - 2R(R+r)]}{(R+r)^4}$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2(r^2 - R^2)}{(R+r)^4} = 0 \qquad (6.68)$$

より

$$R = r \qquad (6.69)$$

のときである．

演 習 問 題

［1］　図6.22のような回路をホイートストンブリッジといい，未知の抵抗 R_x の値を知るために用いる．R_1 は可変抵抗（抵抗値を変化させられる抵抗）であり，Gは微小な電流を検出できる検流計である．Gに電流が流れなくなったときの可変抵抗の値を R_1 とするとき，R_x を求めなさい．

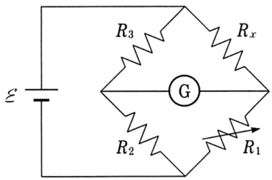


図6.22

［2］　起電力 $\mathcal{E}$ で内部抵抗を無視できる電源に，抵抗 R_1 と R_2 を直列あるいは並列につないだとき，どちらの抵抗における発熱が大きいか．ただし，$R_1 < R_2$ とする．

［3］　起電力 $\mathcal{E}$ で内部抵抗 r の電源に抵抗を図6.23のようにつないだ．R_2 は可変抵抗である．R_1, R_2, R_3 における発熱

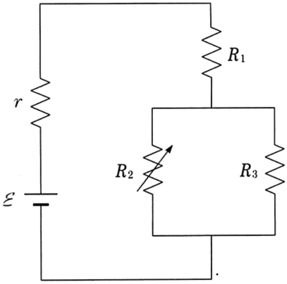


図6.23

の和が最大になる R_2 の値を求めなさい.

［4］ 半径 a で長さ l の導体円柱と，それと同じ長さで内半径が b の円筒が中心軸を共通にして置かれている．これらの導体を電極として間の空間に電気伝導率 σ の物質を満たした．電極間に起電力 $\mathcal{E}$ の電源をつなぎ，内部電極から外部電極に放射状に電流を流した．流れる電流の大きさ I を求めなさい.

［5］ 抵抗率 ρ（電気伝導度 σ）の一様な物質に電流が流れているとき，電流密度が $\boldsymbol{j}$ である部分の単位体積当りの消費電力が

$$p = \rho j^2 = \frac{j^2}{\sigma}$$

で与えられることを示しなさい.

［6］ 最大 I_0 [A] まで測定できるアナログ電流計は，電流 I_0 を流したときに内部のコイルが受ける力を利用して，針が最大目盛を指すように作られている．この電流計と並列に外部に抵抗 R をつなぐと，測定できる最大電流を増すことができる．内部抵抗が r の電流計の最大測定可能電流を kI にするために必要な外部抵抗 R を求めなさい.

［7］ アナログ電流計は，直列に外部に抵抗 R をつなぐことで，電圧計として用いることができる．内部抵抗 r の電流計を最大 V [V] まで測定できる電圧計とするために必要な外部抵抗 R を求めなさい.

また，これを用いて電圧を測定するときに注意すべきことは何か.

7 誘電体と静電場

第5章で，導体が存在するときの電場について調べてきた．そこでは，真空中で成り立つ基本法則に加えて，導体中には多数の自由に動ける電荷が存在するという性質を考慮するだけで，マクロな静電場に関するすべてのことを説明することができた．

それでは絶縁体ではどうであろうか．絶縁体には自由に動ける電荷は存在しない．導体の場合と同様，絶縁体に対する実験事実を知り，その後で，絶縁体のひとつの性質から，誘電体が関係するマクロな静電場のすべてを理解することを試みよう．

§7.1 誘電体に関する実験事実

絶縁体は，電場の中に置かれると以下のような興味深い性質を示すため，**誘電体**ともよばれる．本書でもこの習慣にしたがうことにする．濡れていない紙，布，木や普通のプラスチックなど，電気を通さない物質はすべて誘電体である．外から余分な電荷を与えられていない誘電体を，帯電していない誘電体という．

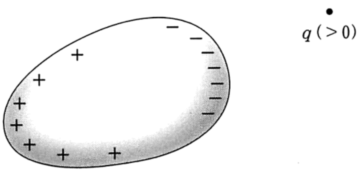


図7.1

（1） 帯電していない誘電体に，図7.1のように電荷 q

(実際の実験では帯電した金属球や，摩擦電気で帯電した別の誘電体など)を近づけると引力が生じる．このとき，q に近い側に q と異種の電荷が，q に遠い側に q と同種の電荷が誘起されるように思われる．この現象を**誘電分極**という．

（2） しかし，もともと帯電していなかった誘電体を，(1) の状態のまま図 7.2 のように q に近い側と遠い側の二つに切り分けてた後，q を遠ざけてみると，導体の場合と違い，どちらも帯電していない．

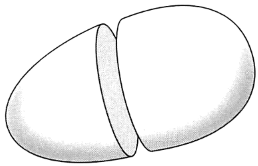


図 7.2

（3） 誘電体を帯電させる（摩擦電気などの電荷を与える）と，導体の場合と異なり，電荷は与えられた位置にとどまる．

（4） 充電した平行板コンデンサーを電源から切り離し極板間を誘電体で満たすと，極板間の電位差が減少する．つまりこのとき静電容量が増加する．

（4）′ 電源につないだままの平行板コンデンサーの極板間を誘電体で満たすと，電源から電流が流れ込む．つまりこのとき静電容量が増加する．

§7.2 物質の誘電率

まず，(4) (4)′ の実験事実は，**物質の誘電率**が真空の誘電率と異なることで説明できることを示そう．もちろん，誘電体の誘電率は内部のミクロな分子の振舞に基づいて理解されるべきものであり，それについては後に行う．

(4) の状況を式で表現してみよう．面積 A，間隔 d の平行板コンデンサーの容量は (5.49)

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

である．図 7.3(a) のように電源をつなぐことで極板間の電位差が $V = \mathcal{E}$ になったとすると，正の極板上の電荷は

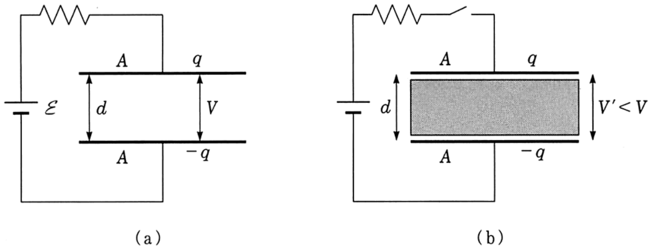


図 7.3

$$q = CV = \frac{\varepsilon_0 A}{d} V \tag{7.1}$$

である．次に，図 7.3(b) のように電源との接続を切って極板間に誘電体をはさむと電圧が下がるというのだから，そのときの電位差は

$$V' = \frac{V}{\kappa_e} \qquad (\kappa_e > 1) \qquad (\kappa:\quad \text{カッパ}) \tag{7.2}$$

と書ける．この操作で極板の電荷は不変だから，コンデンサーの容量は

$$C' = \frac{q}{V'} = \frac{\kappa_e q}{V} = \kappa_e C = \kappa_e \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{7.3}$$

になったと言える．ここに導入した

$$\varepsilon = \kappa_e \varepsilon_0 > \varepsilon_0 \tag{7.4}$$

をその誘電体の**誘電率**という．また κ_e を**比誘電率**または相対誘電率という．比誘電率は ε_r と書かれることもある．

誘電率の次元と SI 単位は，真空の誘電率と同じで

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_0] = Q^2 L^{-2} [F]^{-1} :\quad \mathrm{C^2/m^2 \cdot N} \tag{7.5}$$

であり，比誘電率は無次元である．

$$[\kappa_e] = [\varepsilon_r] = [\varepsilon][\varepsilon_0]^{-1} = 1 \tag{7.6}$$

例題 7.1

上記，(4)′ の状況を式で表現しなさい．

［**解**］ 最初の状態は (4) の場合と同じであるが，今度は，図 7.4 のように電源をつないだままで極板間に誘電体をはさむと電流が流れ込むというのだから，極板上の電荷は増加して

$$q' = \kappa_e' q \qquad (\kappa_e' > 1) \qquad (7.7)$$

と書けるはずである．コンデンサーの容量は

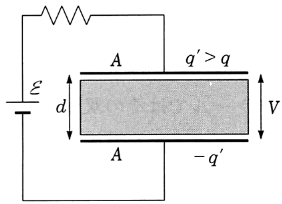


図 7.4

$$C'' = \frac{q'}{V} = \frac{\kappa_e' q}{V} = \kappa_e' C = \kappa_e' \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon' A}{d} \qquad (7.8)$$

になったことになる．はさんだのは (4) の場合と同じ誘電体であるとすれば $C'' = C'$ のはずである．よって，κ_e' は比誘電率 $\kappa_e = \varepsilon_r$ に等しく，ε' は (7.4) の誘電率 ε と同じものである．

§7.3　誘電体のミクロな性質とマクロな電場

誘電体の周りのマクロな電場の性質に関係する誘電体のミクロな性質は，以下の 3 点である．

（i） 誘電体中の電子は，導体中の自由電子とは異なり，すべて分子内に束縛されている．

（ii） 誘電体を電場中に置くと，各分子の電子（負電荷）

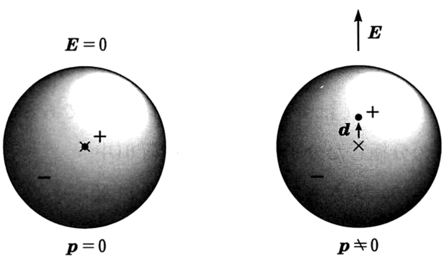


図 7.5

の分布の重心が図 7.5 のように原子核（正電荷）の分布の重心からずれ，（**誘起**）**双極子モーメント**をつくる．これを分子が**分極する**という．

(iii)　HCl や H_2O のように，正負の電荷の分布が電場がなくてもずれていて，（**永久**）**双極子モーメント**をもっている分子もある（図 4.17）．ただし，外場がないときは各分子がそれぞれが勝手な向きを向いているので，マクロなスケールではその双極子モーメントの効果は現れない．しかし，電場の中に置くと各分子の双極子モーメントの向きがそろって，効果が現れる．これを分子が**配向する**という．

§7.4　誘電体を粗視化したモデル

導体の場合もそうであったが，誘電体も真空中に荷電粒子（原子核と電子）が浮かんでいるだけであるから，すべての原子核や電子の位置を指定することができれば，クーロンの法則の重ね合せで周りの電場を説明できる．しかし，たとえそのような位置の指定が可能であったとしても，正負の電荷の寄与が大部分打ち消し合い，差として残る小さな効果だけが実際のマクロな場を作っている．したがって，マクロな電磁気学でははじめから中性の分子を前提として，それからのずれがひき起こす効果を扱う．

ミクロな状態とマクロな場の説明をつなぐものは，ここでも粗視化の手続きである．粗視化の概念が曖昧な読者は，§3.4 の電荷密度の粗視化のプロセスをよく復習してから読み進んで欲しい．

双極子モーメントの粗視化の場合，まず注意すべきことは，各分子の電荷分布の ずれ はマクロなスケールでは 0 であることである．つまり，誘電体の中の分極した分子は，正味の電荷 0（中性）の，大きさのない点状粒子が，双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ をもっている状態とみなすことができる．§4.6 で学んだように，双極子モーメントの起因はあ

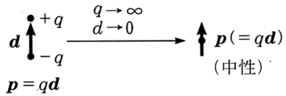


図 7.6

くまで正負の電荷が距離 d だけ離れていることであるが，図 7.6 のようにその双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ の向きと大きさを保ちつつ，$d \to 0$，$q \to \infty$ の極限をとった点状粒子を考える，といってもよい．

つまり，

誘電体内の分子は電場の中に置かれると，中性のままで電気双極子モーメントを生じる．

これが，誘電体を理解するために必要な，物質のミクロな性質である．あとはこれを粗視化すれば，誘電体の周りのマクロな静電場に関するすべての現象を理解することができる．

分　極

双極子モーメントはベクトルだから，図 7.7(a) のような集団を粗視化すると，ベクトル場（位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の連続関数として与えられる物理量）になる．

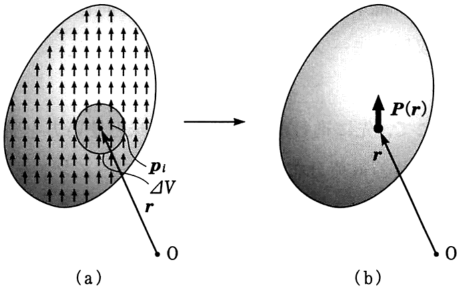


図 7.7

それを**分極**といい，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ で表す．

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i(\Delta V\text{内})} \boldsymbol{p}_i}{\Delta V} \qquad \text{（粗視化の意味で）} \tag{7.9}$$

これは，§3.4 で点電荷の集合の粗視化によって電荷密度というスカラー場 $\rho(\boldsymbol{r})$ を定義したのと同様のプロセスである．粗視化の意味の極限 $\lim_{\Delta V \to 0}$ とは，点 $\boldsymbol{r}$ の周りの微小体積 ΔV を次第に 0 に近づけていく過程で，まだ多数（たとえば，数千万個程度）の双極子モーメント（分極した分子）をその中に含む状態で，右辺の比の値が一時 ΔV を減らしてもほとんど変化しなくなる，

そのときの値をもって $\lim_{\Delta V \to 0}$ の極限値とする，という意味であった．(ΔV をさらに小さくしてしまうとかえって極限値が定義できないのは，電荷密度の場合と同様である．) この手続きを点 $\boldsymbol{r}$ を連続的に移動させながら続けると，ベクトル場 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ (図 7.7(b)) が得られる．

定義が (7.9) だから，分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ の大きさ $P(\boldsymbol{r})$ は，点 $\boldsymbol{r}$ 付近の単位体積当りの双極子モーメントの大きさ (すなわち，分子 1 個の双極子モーメントの $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ と同じ向きの成分 × 分子の数密度) に等しい．分極の次元と SI 単位は

$$[P] = [p]L^{-3} = QL^{-2} : \quad \mathrm{C/m^2} \tag{7.10}$$

である．電束密度および面電荷密度と同じ次元であることに注意しておく．当然双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ とは次元が異なる．

用　語

ここで，先に進む前に，用語の意味と使い方を整理しておこう．1 個の分子内の正負の電荷分布がずれて双極子モーメントを生じることを，分子が**分極する**という．また，誘電体内の分子集団がそろって双極子モーメントを生じること，あるいは永久双極子モーメントをもった分子集団が配向する現象を，誘電体が「分極する」あるいは「誘電分極する」，または誘電体の「誘電分極が起こる」という．このような動詞的な使い方に対して，名詞の「分極」は双極子モーメントの集団を粗視化して定義したベクトル場 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ のことである．双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ と分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ とは，記号は似ており互いに関連してはいるが，異なる量であること，また特に前者が分子 1 個 1 個に付随してとびとびに存在する量であるのに対し，後者は電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ や電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ 等と同様，場の量であることを，くり返し強調しておく．

§7.5　分極が作る電場

誘電分極した誘電体自体，その内外に電場を作る．この電場は，その誘電分極を引き起こした外からの電場 (外場) と重ね合わさって存在する．基本

原理である重ね合せの原理は厳然として成り立つからである．

しかしここでは，しばらく分極が作る電場のみをとり出して考える．その電場は，誘電体内のすべての分子の双極子が作る電場の重ね合せのはずであるが，それを前節で導入した分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ で表現しようというわけである．ただし，ベクトル場である電場よりもスカラー場である静電ポテンシャルの方が扱いが簡単なので，それで考える．

§4.6 で，原点にある双極子モーメントが点 $\boldsymbol{r}$ に作る静電ポテンシャルが(4.73)で近似できることを学んだが，いまのわれわれのモデルでは $d\to 0$ の極限をとって $\boldsymbol{p}$ は大きさのない点の上に存在するから，この式は近似でなくすべての $\boldsymbol{r}$ に対して厳密に成り立つ．よって，図7.8の点 $\boldsymbol{r}'$ にある双極子モーメント $\boldsymbol{p}'$ が点 $\boldsymbol{r}$ に作る静電ポテンシャルは

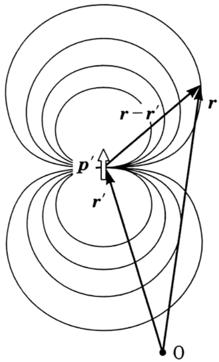


図7.8

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{7.11}$$

である．これは

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{p}'\cdot\nabla'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{7.12}$$

とも書ける．∇' は $\boldsymbol{r}'$ に関するナブラ演算子 ∇ である．

例題 7.2

$$\nabla'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{7.13}$$

を示しなさい．

［解］

$$\left(\nabla' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

$$= \frac{x-x'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} \qquad (7.14)$$

だから

$$\nabla' \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{(x-x',\ y-y',\ z-z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \qquad (7.15)$$

である．

分極電荷密度

以下，(7.12)を利用して，図7.9のような空間内の領域Vを占めている誘電体の分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')$ 全体が作る静電ポテンシャルを計算する．これは，点電荷が作るポテンシャル（4.16）を参照しながら，連続的な電荷密度分布が作る静電ポテンシャルの表式（4.18）を導いた手続きと同様の考え方である．数学的には本書の程度を越えるが，正しいイメージを損なわずにこの過程を説明する他の方法は見あたらない．初読の際は計算の詳細は無視して，その手続きの流れと結果のみに注目していただければ結構である．

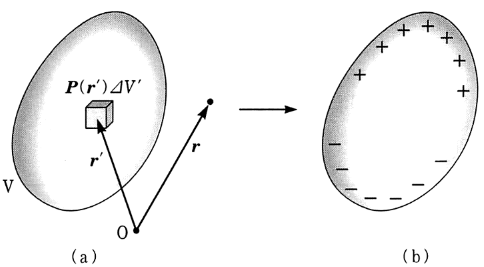


図7.9

分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')$ の大きさは双極子モーメントの密度に等しいから，$\boldsymbol{r}'$ の周りの微小体積 $\varDelta V'$ 内に含まれる"双極子モーメント"は，

$$\varDelta \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}') \approx \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\varDelta V', \quad \varDelta V' \to 0 \quad \text{の極限では} \quad d\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\,dV' \tag{7.16}$$

で与えられる．粗視化によって定義された $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')$ は連続関数なので，ここでの $\varDelta V' \to 0$ は数学的な意味での，どこまでも 0 に近づけることのできる極限である．これが点 $\boldsymbol{r}$ に作る静電ポテンシャルは（7.11）より，

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\phi(\boldsymbol{r}) &\approx \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\varDelta V'}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\ &\text{あるいは} \\ d\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\,dV'}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

である．したがって，領域 V 内の分極全体が点 $\boldsymbol{r}$ に作る静電ポテンシャルはその重ね合せ，すなわち，積分で表され

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{r}) &= \int_{\mathrm{V}} d\phi(\boldsymbol{r}) \\ &= \int_{\mathrm{V}} \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\,dV'}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}}\left(\nabla'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\,dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}}\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\,dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\mathrm{S}}\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot d\boldsymbol{S}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{V}}\frac{-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,dV' \end{aligned} \tag{7.18}$$

と表される．S は誘電体の全表面である．ここに現れた $\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ はベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の**発散**とよばれるスカラー場で，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ とも書かれる．デカルト座標では

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_x, A_y, A_z)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{7.19}$$

である．ベクトル場の発散は，マクスウェル方程式の微分形に登場する非常に重要な概念であるが，本書では本節と付録でしか扱わない．

なお，上の計算の途中で，一般にスカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ とベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の積に対して成り立つ公式

$$\nabla\cdot(f(\boldsymbol{r})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) = (\nabla f(\boldsymbol{r}))\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + f(\boldsymbol{r})(\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) \tag{7.20}$$

を，$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}'$，$\nabla \to \nabla'$ として，

$$f(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}') \tag{7.21}$$

の場合に適用し，また，最後にベクトル場の発散に対する**ガウスの定理**（付録参照）を用いて，誘電体が占める領域 V に関する体積積分をその外表面に対する面積分に変換した．

得られた結果（7.18）は 2 つの項の和になっているが，ともに静電ポテンシャル（4.19）と（4.18）の形をしている．すなわち，誘電体表面上の点 $\boldsymbol{r}'$ の周りの無限小面積 dS' に存在するみかけの電荷

$$dq_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}')\,dS' = \sigma_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r}')\,dS' \tag{7.22}$$

と，内部の点 $\boldsymbol{r}'$ の周りの無限小体積 dV' 内に存在するみかけの電荷

$$dq_{\mathrm{V}'} = -\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\,dV' = \rho_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r}')\,dV' \tag{7.23}$$

が作る静電ポテンシャルの（積分による）重ね合せの表式になっている．この表式に現れた

$$\sigma_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \tag{7.24}$$

を**分極(表面)電荷密度**

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r}) &= -\nabla\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) \\ &= -\left(\frac{\partial P_x(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \frac{\partial P_y(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \frac{\partial P_z(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{7.25}$$

を**分極(体積)電荷密度**という．つまり，誘電体全体の分極が作る静電ポテン

シャルは，これらの分極電荷が作る静電ポテンシャルに等しい．したがって，誘電体全体の分極が作る静電場も，これらの分極電荷が作る静電場に等しい．ただし，これらの分極電荷は，誘電体内の分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ 全体の効果と数学的に同等な効果を生み出す仮想的な概念であるから，実際にそこに電荷があるわけではない．

たとえば，図 7.9(a) の誘電体の分極が一様な場合は，分極の発散(7.25)，すなわち一種の微分で表される分極体積電荷密度はいたるところ $\rho_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r}) = 0$ であるとしてよいから，分極が作る電場は，図 7.9(b) のような分極表面電荷密度 $\sigma_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r})$ だけで表すことができる．

観測事実の解釈

以上で準備が完了したので，§7.1 に挙げた観測事実の解釈をしよう．

まず，(1) の誘電分極の現象は，上にくわしく述べた分極表面電荷を意味すると解釈できる．図 7.1 のように外場が点電荷で作られている場合，電場は一様ではないので各分子の双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ は場所によって異なり，したがって分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ も一様ではない．しかしその場合でも誘電体内部に仮想的に生じる分極体積電荷密度 $\rho_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r})$ (7.25) は無いと考えてよい．分極を引き起こしている外からの静電場は，真電荷のないところでは発散 (div) が 0 であるような場 (付録参照) だから，その影響で生じる $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ も $\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = 0$ を満たすように分布している可能性が高いからである．$\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) \neq 0$ が起こるのは，マクロなスケールで誘電率が変化する物質の場合のみであると考えてよい．

次に，(2) については，もともと，各分子は中性のままで正負の電荷の分布が少しずれていただけであるから，誘電体を分極した状態で二分して外場を除くと，各部分とも

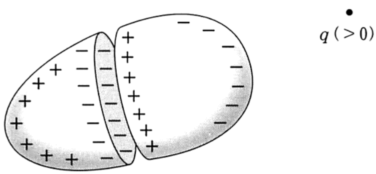


図 7.10

電気双極子モーメントのない中性の分子の集合体にもどるのは当然である．また，二分させて外場を除く前の状態では，各部分の分極全体を別々に分極表面電荷に置き換えることができるから，切り口両面にも図 7.10 のように互いに負号が逆の分極表面電荷を想定することになる．もし，両方をあまり離さず切り口のギャップが狭いままで保持すると，切り口の分極表面電荷は互いに打ち消し合うので，切断する前と同じだから，つじつまは合っている．

(3) については，誘電体は絶縁体ともよばれ電荷は自由に動けないので，外から加えられた真の電荷はその場にとどまらざるをえないと解釈できる．

一様な分極

例として，図 7.11(a) のような直方体をした誘電体がその側面に平行に一様に分極している場合を考えよう．一様なので分極ベクトルの場 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ の $\boldsymbol{r}$ を省略して $\boldsymbol{P}$ と書く．$\boldsymbol{P}$ の向きに z 軸をとり，側面に垂直に x 軸，y 軸をとると，

$$\boldsymbol{P} = P\boldsymbol{e}_z \tag{7.26}$$

と書ける．側面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{e}_z$ 成分をもたないから，側面の分極表面電荷密度は

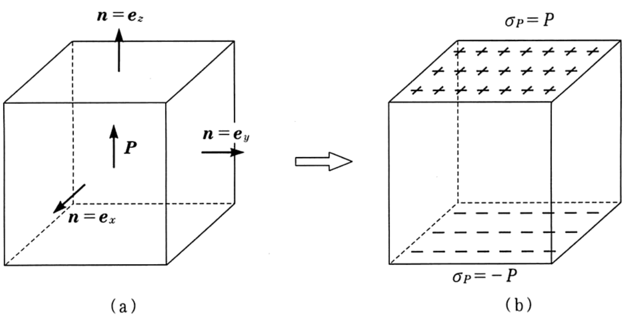


図 7.11

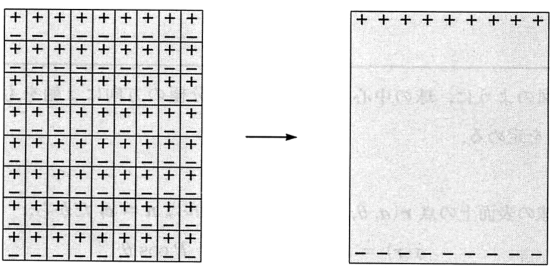
$$\sigma_{側} = P\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n} = 0 \qquad (7.27)$$

である．上下面の法線ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{e}_z, -\boldsymbol{e}_z$ だから，分極表面電荷密度は

$$\sigma_{上} = P\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = P, \qquad \sigma_{下} = P\boldsymbol{e}_z \cdot (-\boldsymbol{e}_z) = -P \qquad (7.28)$$

である．つまり，この直方体の誘電体の分極全体の効果は，図 7.11(b) のように，上表面に面密度 $\sigma_P = P$ の表面電荷，下表面に面密度 $-\sigma_P$ の表面電荷があると仮定したときと同じ電場を内外に作る．もし誘電体が薄い板状であれば，ちょうど平行平板コンデンサーと同じ状態だから，側面付近を除き外部にはほとんど電場を作らず内部にのみ分極と逆向きの電場を作っているはずである．ただし，このほかに，分極を作る原因となった外場が必ず存在しているはずだから，それを加え合わせた電場が実際の電場である．それは当然ながら分極と同じ向きを向いている．詳細は次節で学ぶ．

ところで，以上の議論は，結果だけを見ると，図 7.12(a) のような多数の分子の双極子モーメントの電荷の ずれ が，上下の隣同士打ち消し合って表面の電荷のみが残り，図 7.12(b) のようになったものであると解釈できそうであるが，そうではない．本節の計算は電荷の重ね合せをしたのではなく，もともと中性の双極子モーメントを重ね合わせたものである．よって，図



(a)　　(b)

図 7.12

7.12(a) の各ブロックの電荷は分子の体積とは無関係の体積をもつブロックごとの分極表面電荷を表していると考えるべきである．これは，ブロック表面に存在するから容易に打ち消し合う．強いて双極子モーメントで考える場合も，各ブロックは分子の双極子モーメントを表すのではなく，分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ から作られた双極子モーメント (7.16) の $\Delta V \to 0$ (原子よりはるかに小さいサイズ) の極限の図であると考えるべきである．

例題 7.3

図 7.13 のような一様な分極 $\boldsymbol{P}$ をもつ半径 a の球形の誘電体の分極表面電荷密度を求めなさい．また，この分極が誘電体の内外に作る電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めなさい．(注：実際に誘電体の内外に存在する電場は，ここで求める $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に外場を重ね合わせたものである．演習問題 [8] を参照のこと．)

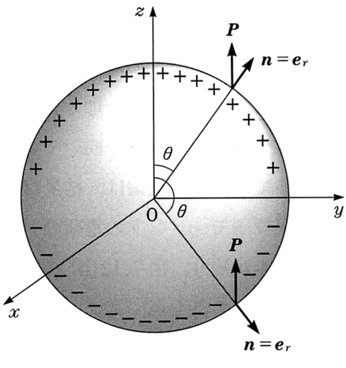


図 7.13

［解］　図のように，球の中心を原点として，分極の方向に z 軸をもつ極座標 (r, θ, φ) を定める．

$$\boldsymbol{P} = P\boldsymbol{e}_z \tag{7.29}$$

である．球の表面上の点 $\boldsymbol{r}(a, \theta, \varphi)$ の法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_r$ だから，

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = P\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r = P\cos\theta \tag{7.30}$$

である．

これは，［例題 4.5］の表面電荷分布と同じ形をしている．よって，$\rho\delta \leftrightarrow P$ の対

応に注意して，内外の電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めることができる．すなわち，内部 $r < a$ では（4.80）を参照して，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z \tag{7.31}$$

である．また，外部 $r > a$ では，（4.82）を参照して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{a^3 P\cos\theta}{\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_r - \frac{a^3 P}{3\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_z \\ &= \frac{2a^3 P\cos\theta}{3\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{a^3 P\sin\theta}{3\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned} \tag{7.32}$$

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$（7.31），（7.32）の概形は図 4.21 と全く同じである．

§7.6 誘電体中の電束密度

ここまでは，誘電体の分極が作る電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ だけを考えてきた．これは，静電ポテンシャルを通じて，直接測定可能な場である $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に対する分極の効果を考えてきたからである．

つぎに電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ について考えよう．空気の分極の効果を無視すると，誘電体の外の空間では真空中の法則が成り立つ．そこには，分極が作る電場と外場を重ね合わせた電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ にともなって，電束密度の場

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{7.33}$$

が存在している．では，誘電体の内部ではどうだろうか．実は，誘電体内の $\boldsymbol{E}$ も $\boldsymbol{D}$ も，それぞれ真空中と同じ形のマクスウェル方程式（3.35）と（4.10）を満たすはずであることが次のようにしてわかる．

誘電体があるときのマクスウェル方程式

まず，電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ については，双極子が作る場はもともとクーロン場だから，それを粗視化して重ね合わせても，さらに外場（静電場であるとする）を重ね合わせても，当然，静的なクーロン場が満たすべき法則

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{7.34}$$

を満たす．

また，電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ は，粗視化して分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ を導入する前に，各分子の双極子モーメントを電荷をもたない点状の双極子モーメントに置き換えた．したがって，それは中性であるから，粗視化した後でも，誘電体上に摩擦電気など外から与えた真の電荷がない場合は当然

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{7.35}$$

を満たす．よって，ガウスの法則

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = q_{\text{内部}} \tag{7.36}$$

はこれまで通り，$q_{\text{内部}}$ として閉曲面 S 内に含まれる真の電荷のみを考えればよく，何ら変更を要しない．

誘電体中の電束密度

以上で，電場の強さ $\boldsymbol{E}$ と電束密度 $\boldsymbol{D}$ で別々に表現すれば，物質が存在する場合も真空中と全く同じマクスウェル方程式（7.34），（7.36）が成り立つことがわかった．しかし，マクスウェル方程式は積分方程式（微分形で書けば微分方程式）であるから，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ や $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ そのものに対する直接の情報ではない．そこで，誘電体内外の電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が分極電荷密度を使って表されることと，マクスウェル方程式を利用して，誘電体内部の電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ を表す式を求めよう．

一般的に求める手続きには微分形の表現を必要とするので，ここでは単純な場合についての考察から，その関係を導く．それには平行板コンデンサーを用いて，その極板間に誘電体を挿入した場合を考える．まず，図 7.14 のように極板間に何もない状態で，電源をつなぎ，極板を帯電させる．縁辺部以外では，極板の面電荷密度 σ は一様である．極板間の電場も縁辺部を除き一様だから $\boldsymbol{r}$ を省略して $\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{D}_0$ と書くと

$$\boldsymbol{D}_0 = D_0\,\boldsymbol{e}_x = \sigma\,\boldsymbol{e}_x, \qquad \boldsymbol{E}_0 = \frac{\boldsymbol{D}_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x \tag{7.37}$$

が成り立っているはずである．次に，電源をはずして極板間に誘電体を挟む．

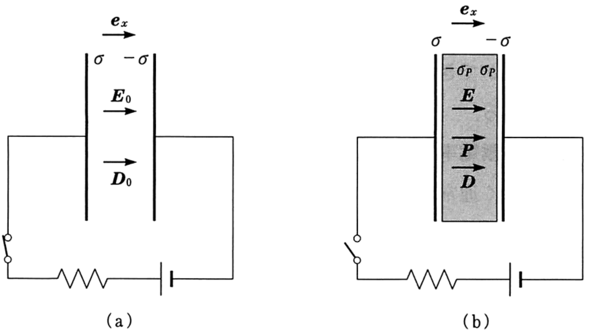


図 7.14

電荷の増減はなく，対称性も変らないから，極板の面電荷密度 σ は不変である．このときの誘電体内部の（外場と分極 $\boldsymbol{P}$ が作る場を重ね合わせた）場を $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{E}$ とすると，これらも当然一様で，

$$\boldsymbol{D} = D\,\boldsymbol{e}_x, \qquad \boldsymbol{E} = E\,\boldsymbol{e}_x, \qquad \boldsymbol{P} = P\,\boldsymbol{e}_x \tag{7.38}$$

である．マクスウェル方程式（ガウスの法則）(7.36) が成立するから，誘電体をはさんでも $\boldsymbol{D}$ と極板表面上の真の電荷の面密度 σ との関係

$$\boldsymbol{D} = \sigma\,\boldsymbol{e}_x \tag{7.39}$$

は変らない．一方，誘電体内の $\boldsymbol{E}$ は，極板上の真電荷密度 σ が作る外場と，誘電体表面に仮想的に生じる分極表面電荷密度 $\pm\,\sigma_P = \boldsymbol{P}\cdot(\pm\,\boldsymbol{e}_x) = \pm\,P$ の寄与の重ね合せで書けるから，平行板コンデンサーの場合の類推で求めると

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x - \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_x = \frac{\sigma\,\boldsymbol{e}_x - \sigma_P\,\boldsymbol{e}_x}{\varepsilon_0} = \frac{\boldsymbol{D} - \boldsymbol{P}}{\varepsilon_0} \tag{7.40}$$

である．よって

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{7.41}$$

であることがわかる．これを一般化して，場が一様でない場合も，誘電体中の各点 $\boldsymbol{r}$ の電束密度を

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) \tag{7.42}$$

で定義することができる．もちろん $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は外場と分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ が作った電場の重ね合せである．

電気感受率と誘電率

強誘電体を除く通常の誘電体では $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は比例する．その関係を

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \qquad (\chi: \text{カイ}) \tag{7.43}$$

と書くとき，χ_e を**電気感受率**という．$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ は $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と同じ次元をもつから，このように書くと χ_e は無次元の量になる．

$$[\chi_e] = [P][\varepsilon_0 E]^{-1} = [P][D]^{-1} = 1 \text{（無次元）} \tag{7.44}$$

$\chi_e > 0$ である．具体的に計算した（7.31）と矛盾するように見えるが，（7.43）の $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は（7.31）に外場を加えたものだから矛盾はない．

（7.43）を（7.42）に代入すると $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ もこれらに比例し

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{7.45}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \quad (> \varepsilon_0) \tag{7.46}$$

と書ける．ε をその物質の**誘電率**という．また，

$$\kappa_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e \ (> 1) \tag{7.47}$$

を**比誘電率**または**相対誘電率**という．表7.1に種々の誘電体の比誘電率を示す．

表 7.1　種々の物質の比誘電率（20℃）

物　質	比誘電率 κ_e	絶縁強度（V/m）
ダイヤモンド	16.5	
ガラス	5～10	9×10^6
ナイロン	3.5	19×10^6
ポリエチレン	2.3	18×10^6
紙	2～3.5	14×10^6
蒸留水	80.1	
空気（1気圧）	1.0059	3×10^6

話を平行板コンデンサーにもどすと（7.45）より

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 \qquad \text{だから} \qquad \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\boldsymbol{E} \tag{7.48}$$

である．したがって，誘電体を挿入した後の極板間の電位差は

$$V = Ed = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_0 d = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} V_0 = \frac{V_0}{\kappa_e} \tag{7.49}$$

である．これを (7.2) と比較すると，ここで導入した ε と κ_e は§7.2の ε，κ_e と同じものであることがわかる．

§7.7　誘電体境界面での $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ の接続条件

$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ が，誘電体の有無に関わらず真空中と同じマクスウェル方程式を満たすことから，誘電体境界での $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ の性質，つまり**接続条件**を知ることができる．(7.42) ～ (7.45) と異なり，この $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ は，分極の効果で生じた場だけでもよく，またそれと外場を重ね合わせた，実際にそこに存在するマクロな場でもよい．以下の議論は片方の誘電体の代りに真空であっても成り立つ．

$\boldsymbol{D}$ の法線成分 D_n は誘電体境界で連続

これを証明するために，図7.15(a) のように境界面の両側の2点 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}'$ を上底，下底の中心にもつ，底面積 ΔA で非常に薄い円筒について，ガウスの法則を適用する．上底，下底が境界面の接面に平行であれば，それらの法線ベクトルを境界面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて表すことができ

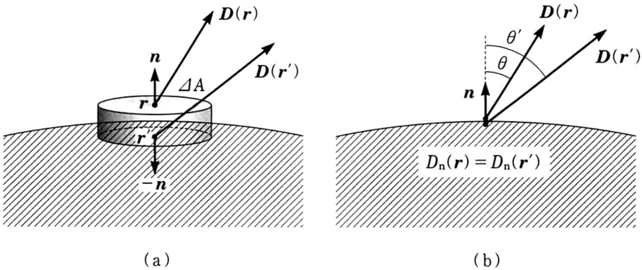


図7.15

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}\varDelta A + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}')\cdot(-\boldsymbol{n})\varDelta A \approx q_{内部} = 0 \qquad (7.50)$$

である．$\varDelta A \to 0$ にしながら $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ を境界をはさんで無限に接近させれば，上式で無視した側面の寄与が実際に 0 になり，≈ は = になる．分極表面電荷は実際にそこにあるわけではないから，$q_{内部}$ には含めない．よって，電束密度の法線成分 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n} = D_n$ は，誘電体境界面で連続

$$D_n(\boldsymbol{r}) = D_n(\boldsymbol{r}'), \quad つまり\ D(\boldsymbol{r})\cos\theta = D(\boldsymbol{r}')\cos\theta' \qquad (7.51)$$

である．なお，境界面に真の面電荷がある場合の接続条件については，章末演習問題［6］を参照されたい．

$\boldsymbol{E}$ の接線成分 E_t は誘電体境界で連続

これを証明するために，図 7.16 のように，境界面の両側の 2 点 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}'$ を接面に平行な長さ $\varDelta l$ の 2 辺の中心にもつ，高さの非常に低い長方形の経路について $\boldsymbol{E}$ の循環（4.10）を計算する．境界面に沿った辺上の変位 $d\boldsymbol{r}$ を境界面に平行な単位ベクトルを $\boldsymbol{t}$ を用いて表すことができ，

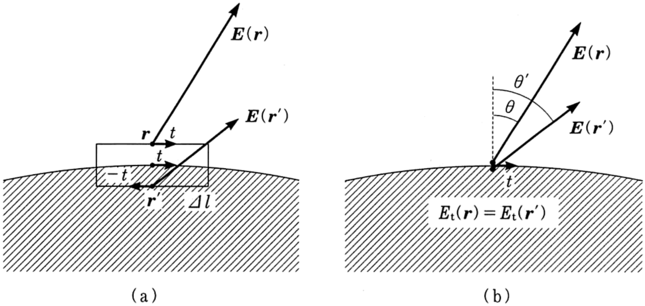


図 7.16

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot \boldsymbol{t}\Delta l + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\cdot(-\boldsymbol{t})\Delta l \approx 0 \qquad (7.52)$$

である．$\Delta l \to 0$ にしながら $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ を境界をはさんで無限に接近させれば，上式で無視した面に垂直な辺の寄与が実際に 0 になり，$\approx$ は $=$ になる．これは，静電場の基本法則だから，表面に真の面電荷があるかどうかにかかわらず成り立つ．よって，電場の強さの接線成分 E_t は誘電体境界面で連続

$$E_t(\boldsymbol{r}) = E_t(\boldsymbol{r}'), \quad \text{つまり} \quad E(\boldsymbol{r})\sin\theta = E(\boldsymbol{r}')\sin\theta' \qquad (7.53)$$

である．

上の 2 つの項の証明ともマクスウェル方程式しか使っていないから，(7.45)の成り立たない強誘電体を含めてすべての誘電体に対してこれらの接続条件は成り立つ．

電場の屈折の法則

さらに，(7.45)が成り立つ普通の誘電体の場合には，この接続条件を，θ，θ' と誘電率 ε，ε' を用いて

$$\frac{\varepsilon}{\tan\theta} = \frac{\varepsilon'}{\tan\theta'} \qquad (7.54)$$

と書くことができる．

例題 7.4

図 7.17 のような，誘電率が ε_1，ε_2 の 2 種類の誘電体の境界がある．どちらも強誘電体ではなく (7.45) の比例関係が成り立つものとする．境界をはさんだ 2 点 A_1，A_2 の電場が図に示された向きを向いているとき，各点の電場の強さ $\boldsymbol{E}$ と電束密度 $\boldsymbol{D}$ を図示しなさい．また，ε_1 と ε_2 はどちらが大きいか．

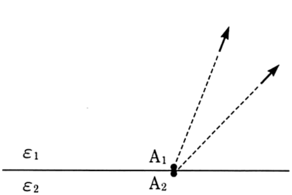


図 7.17

［**解**］ それぞれの誘電体の中で，電場の強さと電束密度は比例するから同じ向きを向いている．まず，図 7.18 のように $\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{D}_1$ を描く．これらは異なる次元の量だから，どちらを長く描いても構わない（ε に関して同じ結論が得られる）．ここでは $\boldsymbol{D}_1$ の方を長く描いた．次に，$\boldsymbol{E}_2$ は，題意の向きに，$\boldsymbol{E}_1$ と接線成分が等しくなるように描く．同様に，$\boldsymbol{D}_2$ は $\boldsymbol{E}_2$ と同じ向きに，$\boldsymbol{D}_1$ と法線成分が等しくなるように描く．$\varepsilon = \boldsymbol{D}/\boldsymbol{E}$ だから，図より $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ である．

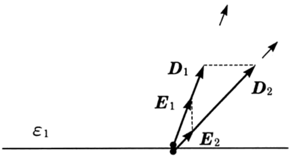


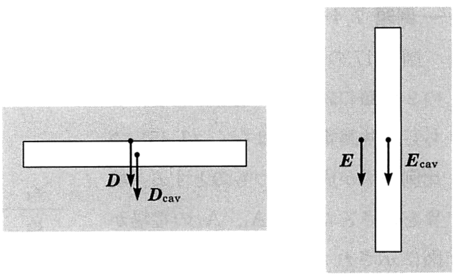
図 **7.18**

例題 7.5

一様な電場をかけて一様に分極させた誘電体の内部に作った，電場に垂直な薄い円板状のマクロな空洞と，電場に平行な細長い棒状のマクロな空洞について，その中央部の電場を求め，空洞以外の部分の電場との大小を比較しなさい．マクロな空洞とは，半径や高さが原子間隔よりはるかに大きな空洞である．

［**解**］ 空洞以外の部分のマクロな電場の強さを $\boldsymbol{E}$，電束密度を $\boldsymbol{D}$ とする．空洞の中央部のマクロな場を $\boldsymbol{E}_{\rm cav}$，$\boldsymbol{D}_{\rm cav}$ とすると，これらは対称性より $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$ に平行で，真空中の関係

$$\boldsymbol{D}_{\rm cav} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{\rm cav} \qquad (7.55)$$



（a）　（b）

図 **7.19**

を満たしている．図 7.19(a) のような円板状の空洞の中央部の付近の場は，面に垂直な成分（法線成分）しかもたないから，電束密度の法線成分の連続性から，

$$\boldsymbol{D}_{\text{cav}} = \boldsymbol{D} \quad \text{が成り立ち，したがって} \quad \boldsymbol{E}_{\text{cav}} = \frac{\boldsymbol{D}_{\text{cav}}}{\varepsilon_0} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon_0} > \boldsymbol{E} \tag{7.56}$$

である．また，図 7.19(b) のような細長い空洞の中央部の付近の場は，面に平行な成分（接線成分）しかもたないから，電場の強さの接線成分の連続性から

$$\boldsymbol{E}_{\text{cav}} = \boldsymbol{E} \quad \text{が成り立ち，したがって} \quad \boldsymbol{D}_{\text{cav}} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{\text{cav}} < \boldsymbol{D} \tag{7.57}$$

である．

§7.8　誘電体中のミクロな電場

§4.6 で学んだように，孤立した分子が電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の中に置かれたとき，その双極子モーメントは $\boldsymbol{p}$ は分子の位置の $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に比例して (4.60)

$$\boldsymbol{p} = \alpha\varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

で与えられる．それでは，誘電体が分極して分子が双極子モーメントをもっているとき，その中のひとつの分子が感じている電場は，本章でいままで考えてきたマクロな電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に等しいであろうか．$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ にはすでに外場 $\boldsymbol{E}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})$ と他の分子の双極子モーメントが作る電場 $\boldsymbol{E}_{\text{pol}}(\boldsymbol{r})$ が重ね合わされている．これで十分だろうか．実は十分でなく，液体や固体中の分子が感じる場はこれと異なる．

誘電体中のマクロな電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は，微小体積 $\varDelta V$ 内の双極子モーメントが $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\varDelta V$ で表されるような連続的な分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ の分布があったと

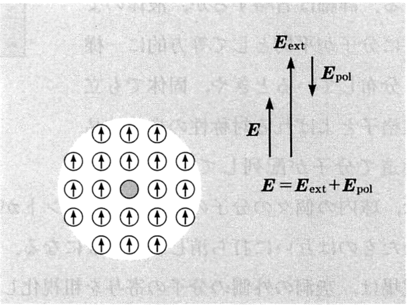


図 7.20

きに，その中に置かれた点電荷（試電荷）が感じるであろう電場である．ところが，実際の固体中の分子の周りを微視的に（ミクロに）見ると，そこにはそのような連続的な $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ の分布はなく，図 7.20 のように，同じような分子が 10 分の数 nm（ナノメートル $= 10^{-9}$ m）程度の格子間隔で規則正しく並んでいる．分子にはそれが「見える」ので，それを塗りつぶして（粗視化して）しまう扱いは近似がよくないのである．正しく計算しようと思えば，ひとつひとつの分子の寄与を加え合わせざるをえない．

とはいえ，すべての分子について加え合わせるのは困難だから，図 7.21 のように，注目する分子を中心としてある半径の球を考えて，球内の分子の寄与のみをひとつひとつ加え合わせ，その外の分子については粗視化して扱うというのが一つの計算法である．

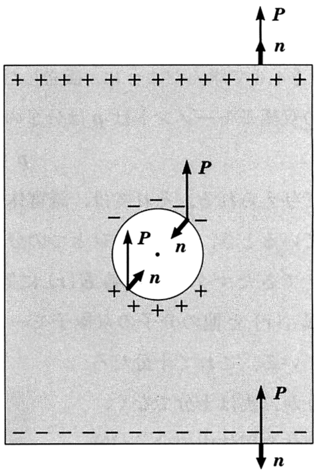


図 7.21

簡単のために，誘電体中のマクロな電場 $\boldsymbol{E}$ や分極 $\boldsymbol{P}$ は一様であるとする．詳細は省略するが，液体のように分子が平均として等方的に一様に分布しているときや，固体でも立方格子とよばれる対称性の良い結晶構造で分子が配列しているときには，球内の個々の分子の双極子モーメントが球の中心に作る電場を重ね合わせたものは互いに打ち消し合って 0 になる．よって，分子が感じるミクロな電場は，空洞の外側の分子の寄与を粗視化して計算したマクロな場でよい．これは，外場と，外表面の分極表面電荷と，球形の内表面の分極電荷の寄与の和になる．前 2 者は球形の穴をくりぬく前と変らず，これまで扱ってきた

$\boldsymbol{E}$ に等しい．後者は計算してみると面白いことに球の半径に関係なく $\boldsymbol{P}/3\varepsilon_0$ に等しい．よって，この近似のもとで，分子が感じるミクロな電場は

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{micro}} = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi_e}{3}\right)\boldsymbol{E} \tag{7.58}$$

である．(7.43) を用いた．

気体の場合は

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{micro}} = \boldsymbol{E} \tag{7.59}$$

がほぼ成り立つ．これは，最も近い他の分子が固体液体の場合に比べてはるかに遠く離れて存在するので，個別に考慮しなければならない分子が近くにいないため，粗視化したマクロな場がかえって良い近似になっているためである．

例題 7.6

(7.58) を導きなさい．

［**解**］ 空洞の中心を原点とし，$\boldsymbol{E}$ の向きに z 軸をもつ極座標で記述する．空洞半径を a とすると，空洞表面上の点 $\boldsymbol{r}(a, \theta, \varphi)$ の法線ベクトルは $n = -\boldsymbol{e}_r$ だから，

$$\sigma_P(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_r = -P\cos\theta \tag{7.60}$$

である．したがって，［例題 7.3］で考えた分極した誘電体球の場合と符号が逆の分極表面電荷が現れると考えればよい．よって，この分極表面電荷による空洞内部の電場の強さは

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{S}} = \frac{P}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z \tag{7.61}$$

である．これとマクロな電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を加え合わせ，さらに (7.43) を用いると，空洞中心での電場は確かに

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{micro}} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{S}} = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi_{\mathrm{e}}}{3}\right)\boldsymbol{E} \tag{7.62}$$

である．((7.58) は誘電体内のミクロな分子が感じる電場を求めようとしたものであり，空洞内に存在する分子の双極子モーメントが作る電場の重ね合せが 0 である

場合に限って計算したので，それが成り立つ空洞中心でのみ正しい．しかし，もし実際にマクロな球形の空洞が空いているときは，(7.57) が空洞内の電場 (一様) を与える.)

§7.9　強誘電体

最後に**強誘電体**について簡単に触れておこう．強誘電体に外から電場をかけると，分子が協力し合って各分子は通常の誘電体よりも大きな双極子モーメントをもち整列する．これを粗視化すると，通常の誘電体よりも大きな分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ が生じる．さらに，外場を 0 にもどしても，この双極子モーメントの整列の状態が残る．これを**自発分極**という．この状態を粗視化すると，外場無しで，ある大きさの分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ が存在することになる．

自発分極

自発分極した強誘電体について考えよう．§7.5 で，外場によって分極した誘電体の分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ だけが周りに作る場をまず計算した．自発分極した強誘電体では，その状態が外場を 0 にもどしたあとでも残っていると考えてよい．したがってたとえば，一様な分極 $\boldsymbol{P}$ をもつ直方体の強誘電体の周りの電場の強さは，図 7.22 ように上下の面に現れる分極表面電荷だけが作る $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に等しい．これは，極板の電荷密度が $\pm\,\sigma_P = \pm\,P$ であるような

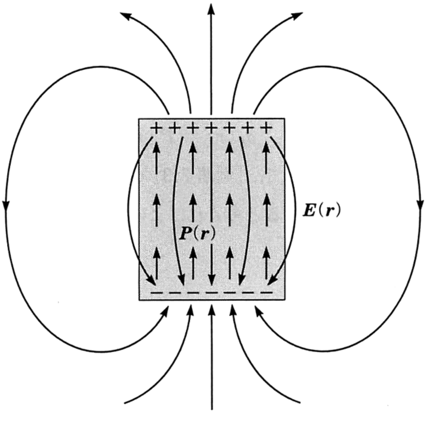


図 7.22

平行板コンデンサーの周りの電場と同じであるから考えやすい．明らかに，外場があってはじめて分極する普通の誘電体の場合と異なり $\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{P}$ と逆向きである．一方，電束密度 $\boldsymbol{D}$ については (7.42)

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) \tag{7.63}$$

が強誘電体に対しても成り立つ．強誘電体の外では $\boldsymbol{P} = 0$ だから当然 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ である．しかし，もはや§7.6の (7.43) 以降で行った場の比例関係を基礎とする議論はこの場合は成り立たない．平板状の強誘電体でも，縁辺部では $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{P}$ が平行あるいは反平行（平行で向きが反対）ですらない．

ただし，この場合も常に成り立つ法則に基づけば状況に応じて解析が可能である．例として，図 7.23(a) のような薄い板状の強誘電体がその厚さ方向に一様な分極している場合を考えてみよう．粗視化すると図 (b) のように一様な分極 $\boldsymbol{P} = P\boldsymbol{e}_z$ をもっている．$\boldsymbol{P}$ の効果は図 (c)のような分極表面電荷密度 $\pm\ \sigma_P$ で表される．これは極板間の距離が十分狭い平行板コンデンサーの場合と同じだから，誘電体内の電場の強さは

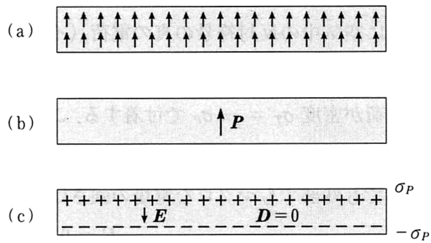


図 7.23

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z = -\frac{\boldsymbol{P}}{\varepsilon_0} \tag{7.64}$$

で，誘電体の外の $\boldsymbol{E}$ は縁辺部を除きほとんど 0 である．したがって，電束密度も外部では縁辺部を除き 0 である．一方，誘電体内の $\boldsymbol{D}$ は，(7.42)，(7.64) より縁辺部を除き

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} = 0 \tag{7.65}$$

である．つまり，自発分極した薄い板状の強誘電体の内部では，電場の強さだけが存在する．これは，(7.43)以下の議論と矛盾するが，上に述べたように，そもそも自発分極した強誘電体に定数の χ_e や ε を用いる線形の理論は適用できないのである．

強誘電体の中和

実在の強誘電体にはさらに次のような現象が起こっているのが普通である．自発分極した強誘電体を放置しておくと，分極表面電荷が縁辺部から次第に空気中の反対符号の真の電荷（イオンや帯電したほこりなど）を引きつける．十分時間が経つと図7.24のように，表面の $\sigma_P \neq 0$ の部分に真の表面電荷が密度 $\sigma_T = -\sigma_P$ で付着する．この現象を強誘電体が**中和**されるという．このため，分極表面電荷の効果は打ち消されて，自発分極した誘電体の内部でも外部でもマクロな電場の強さは0になる．

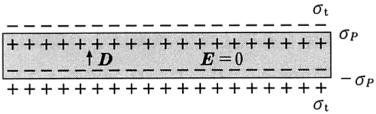


図 7.24

$$\boldsymbol{E} = 0 \tag{7.66}$$

しかし，今度は誘電体内部の電束密度は

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P} \neq 0 \tag{7.67}$$

となっている．これは，今度は真の電荷が上下面に存在するので，電束密度は平行板コンデンサーの類推から

$$\boldsymbol{D} = -\sigma \boldsymbol{e}_z = -(-\sigma_P)\boldsymbol{e}_z = P\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{P} \tag{7.68}$$

だから，向きも含めてつじつまが合っている．

他の形の場合も，(7.43)や(7.45)を使わず，誘電体中の $\boldsymbol{D}$ の定義(7.42)と基本法則（静電場に対するマクスウェル方程式）(7.34)と(7.36)，あるいはそれらから導かれた接続条件(7.51)と(7.53)にしたがって考えればマクロな電場の解析は可能である．

演 習 問 題

[**1**]　直径 5 cm，高さ 10 cm，厚さ 0.3 mm の直円筒型のプラスチック製コップの側面と底（ともに外側）にアルミフォイルを貼り，中に 9 cm の高さまで食塩水を入れた．食塩水は導体である．プラスチックの比誘電率が 2 であるとして，食塩水と外側のアルミの間の静電容量を求めなさい．

[**2**]　帯電した導体が誘電率 ε の誘電体に囲まれている．導体表面の真電荷密度が σ である部分のすぐ外の $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{E}$，および，分極電荷密度 σ_P を求めなさい．

[**3**]　極板の面積 A，面間隔 d の平行板コンデンサーの極板間の空間を誘電体で満たす．厚さ d_1 を誘電率 ε_1 の誘電体，残りの部分を誘電率 ε_2 の誘電体で満たしたときの静電容量を求めなさい．

[**4**]　極板の面積 A，面間隔 d の平行板コンデンサーの面積 A_1 の部分の厚さ全体にわたって誘電率 ε_1 の誘電体，残りの部分に誘電率 ε_2 の誘電体を満たしたときの静電容量を求めなさい．

[**5**]　電荷 q を帯電した半径 a の導体球の周りを，半径 $b > 0$ の誘電率 ε_1 の誘電体の球で包んだときの，内外の電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$，電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，および誘電体内の分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ と誘電体表面の分極電荷密度を求めなさい．

[**6**]　誘電体の境界に面密度 $\sigma(\boldsymbol{r})$ の真電荷があるときの電場の接続条件を求めなさい．また，境界付近に体積密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ の真電荷が分布しているときはどうか．

[**7**]　電場の屈折の法則 (7.54) を証明しなさい．

[**8**]　一様な電場 $\boldsymbol{E}_0 = E_0\,\boldsymbol{e}_z$ の中に半径 a の球形の誘電体を置いた．この誘電体の比誘電率が κ_e であるとき，分極 $\boldsymbol{P}$，分極表面電荷密度 $\sigma_P(\boldsymbol{r})$，および誘電体内外の電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$，電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を，$\boldsymbol{E}_0$ と κ_e で表しなさい．

8 電流の周りの磁場

本章から第12章まで，何らかの形で磁場が関係する現象について学ぶ．電流があれば磁場ができること，磁場は電流に力をおよぼすこと，磁場中で回路が運動すると起電力が発生すること，回路を貫く磁束が変化しても起電力が発生すること，誘導起電力を発生する回路素子，すなわちコイルを含む回路の性質などである．本章では，まず電流が作る磁場について学び磁場の強さと磁束密度に対するマクスウェル方程式を導入する．

§8.1　電流の周りの磁場に関する実験事実

電流が流れていると，その周りに次のような現象が見られる．

（1）　直線電流 I の周りに図8.1のような軸を回る渦状の磁場ができる．電流の向きを z 軸の正の向きとする円筒座標を用いると，比例定数を k として

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = k\frac{I}{\xi^{1.0}}\boldsymbol{e}_\varphi \qquad (8.1)$$

である．すなわち，磁場は電流からの距離に反比例する大きさをもつ．正確に反比例しているかどうかは，実験によってのみ確認できることである．そのことを表すために分母を単に ξ ではなく $\xi^{1.0}$ とした．ここで，$k>0$,

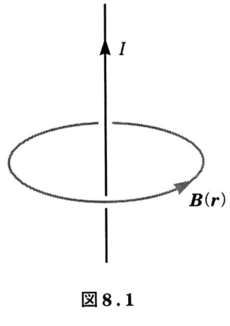


図8.1

つまり，$\boldsymbol{B}$ は右ネジを I の方向に進めるときに回す向きである．

（2）図8.2のような距離 a だけ離れて平行に流れている直線電流 I_1，I_2 の間には，積 I_1I_2 に比例し a に反比例する力がはたらく．

$$F \propto \frac{I_1I_2}{a^{1.0}} \tag{8.2}$$

ただし，I_1I_2 が同じ向きならば引力，逆向きならば斥力である．また，この力は直線電流のすべての部分にはたらいており，導線の部分にはたらく力はその部分の長さに比例する．したがって，これを定量的に扱うときは単位長さ当りの力で考えなければならない．

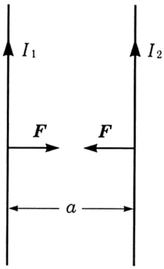


図8.2

§8.2　ベクトルのベクトル積

磁場に関する現象の記述にはベクトル積が必要なので，まずそれについて学ぶ．ベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ があるとき，

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{8.3}$$

を $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の**ベクトル積**（または**外積**）という．これは，図8.3に示すようなベクトルである．向きは

$$\boldsymbol{C} \perp \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \tag{8.4}$$

で，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ で決まる面に垂直な2つの向きのうち，$\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{B}$ に向かって回した右ネジが進む向きである．また，大きさは，

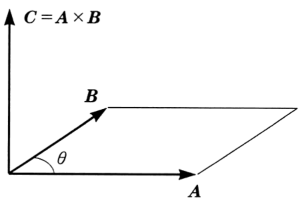


図8.3

$$|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{8.5}$$

である．ただし，θ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角度（$< \pi$）である．つまり，$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$

は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が作る平行四辺形の面積に等しい．この定義から

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \tag{8.6}$$

また

$$\boldsymbol{A} \parallel \boldsymbol{B} \quad \text{なら} \quad \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = 0, \qquad \text{特に} \quad \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{8.7}$$

であることは明らかである．デカルト座標，極座標，円筒座標等の単位ベクトルは互いに垂直だから，図 1.7，図 3.9，図 3.11 より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x &= \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\theta \\ &= \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_\xi \times \boldsymbol{e}_\xi = 0 \end{aligned} \tag{8.8}$$

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x, \qquad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \tag{8.9}$$

$$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_r, \qquad \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta \tag{8.10}$$

$$\boldsymbol{e}_\xi \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_\xi, \qquad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\xi = \boldsymbol{e}_\varphi \tag{8.11}$$

が成り立つ．これから，デカルト座標で

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z), \qquad \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z) \tag{8.12}$$

とすると，

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y,\ A_zB_x - A_xB_z,\ A_xB_y - A_yB_x) \tag{8.13}$$

である．

例題 8.1

ベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ についてベクトル積の分配則 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ が成り立つ（証明略）．これを用いて (8.13) を示せ．

［解］

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z) \times (B_x\boldsymbol{e}_x + B_y\boldsymbol{e}_y + B_z\boldsymbol{e}_z) \\ &= A_xB_x\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_x + A_xB_y\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y + A_xB_z\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z \\ &\qquad + A_yB_x\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x + A_yB_y\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_y + A_yB_z\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z \\ &\qquad + A_zB_x\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x + A_zB_y\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y + A_zB_z\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z \\ &= (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y + (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z \\ &\qquad + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x \end{aligned}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\,\boldsymbol{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\,\boldsymbol{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\,\boldsymbol{e}_z$$
$$= (A_yB_z - A_zB_y,\ A_zB_x - A_xB_z,\ A_xB_y - A_yB_x) \qquad (8.14)$$

§ 8.3　ローレンツ力と磁束密度

ベクトル積について理解できたので，第1章で磁束密度の定義のために導入したローレンツ力 (1.9)

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$$

について考えよう．電場はないものとすると，点電荷 q (>0) が静止しているときには力がはたらかない．この電荷を速度 $\boldsymbol{v}$ で動かしたときに力がはたらけば，そこに磁場 $\boldsymbol{B}$ があることがわかる．ただし，たまたま $\boldsymbol{v}$ が磁場に平行であると力がはたらかないから，別の方向に動かして確かめる必要がある．$\boldsymbol{B}$ の大きさと向きを定めるには，同じ速さ $|\boldsymbol{v}|$ でさまざまな方向に動かして，最も力が大きくなる $\boldsymbol{v}$ の向きを探す．そのとき $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{B}$ と直角のはずだから，$F = qvB$ であり，よって，$\boldsymbol{B}$ の大きさは $B = F/qv$ である．また，向きは図 8.4 からわかるように，ベクトル積 $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}$ と同じ向きである．なお，$\boldsymbol{B}$ が磁束密度とよばれるのは，その重要な性質を表すマクスウェル方程式がガウスの法則の形で書かれるからである（§ 8.12 参照）．

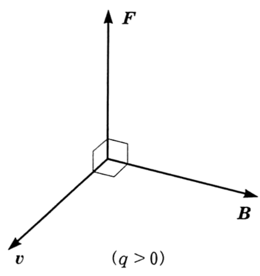


図 8.4

例題 8.2

> 一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の領域で，$\boldsymbol{B}$ に垂直な速度 $\boldsymbol{v}_0$ で放出された電子のその後の運動を調べなさい．

［解］　図 8.5 のような $\boldsymbol{B}$ に平行な z 軸と，$\boldsymbol{v}_0$ に平行な x 軸をもつデカルト座標系で考える．電子の質量を m，電荷を $-e$ とすると，放出された時刻 $(t=0)$ に

電子が受けるローレンツ力は

$$\boldsymbol{F} = -\,ev_0\,\boldsymbol{e}_x \times B\,\boldsymbol{e}_z = ev_0 B\,\boldsymbol{e}_y \tag{8.15}$$

である．この力には z 成分がないので，電子は xy 平面内で運動を続ける．つまり，電子の速度 $\boldsymbol{v}$ は常に $\boldsymbol{B}$ に垂直である．また，力は速度に垂直だから，電子の速さは変らない．よって，ローレンツ力の大きさも常に一定で，各瞬間の速度 $\boldsymbol{v}$ に垂直にかかり続けるので，電子は等速円運動を続ける．軌道の半径を a とすると，円運動に必要な向心力は $mv_0{}^2/a$ で，これがローレンツ力に等しいから

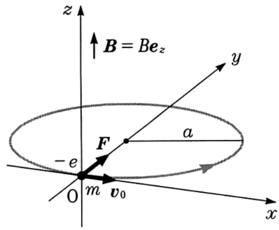


図 8.5

$$\frac{mv_0{}^2}{a} = ev_0 B \qquad \text{より} \qquad a = \frac{mv_0}{eB} \tag{8.16}$$

である．また，回転の周期 T と角周波数 ω は

$$T = \frac{2\pi a}{v_0} = \frac{2\pi m}{eB}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{m} \tag{8.17}$$

で，初速度 v_0 に依存しない．（ω を**サイクロトロン角周波数**という．）

§8.4　ビオ－サバールの法則

磁場の強さ

(8.1) は，前節で説明したような操作を直線電流の周りで行った結果わかった，磁束密度の大きさと向きを表しているという意味に解釈できる．これは，直線電流の周りに，マクロな電流に直接関係する**磁場の強さ**とよばれる場

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = k'\frac{I}{\xi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{8.18}$$

が発生していると想定し，それに比例する磁束密度の場

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{8.19}$$

が，それにともなって存在していると考えればよい．今後，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ についても，$\xi^{1.0}$ を単に ξ と書く．

比例係数 k' は原理的には任意の無次元量でよいが，SI 単位系では § 8.6 で学ぶアンペールの法則（マクスウェル方程式のひとつ）の両辺に余計な係数がつかないように定める．電場の場合も，ガウスの法則（マクスウェル方程式のひとつ）に余計な係数がつかないように係数を (3.6)，(3.14) のように定めたのと同じ意図である．結論を先に書くと，

$$k' = \frac{1}{2\pi}, \qquad k = \mu_0 k' = \frac{\mu_0}{2\pi} \tag{8.20}$$

である．これはまた，本節ですぐに学ぶように，ビオ－サバールの法則の係数をクーロンの法則と同じように $1/4\pi$ とするという方針から決めた係数とも一致する．

以下では，アンペールの法則を導くまで k，k' を残すのは煩わしいので，ビオ－サバールの法則の係数を天下り的にクーロンの法則と同じに定めて議論を進め，そうしておくとマクスウェル方程式に余計な係数がつかないことを，後で確かめることにする．

μ_0 を**真空の透磁率**という．磁場の強さ $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の次元と SI 単位は

$$[H] = [I]L^{-1} = QT^{-1}L^{-1}: \quad \mathrm{A/m} \tag{8.21}$$

であり，μ_0 の次元と SI 単位は

$$\begin{aligned}[\mu_0] &= [B][H]^{-1} = [F]Q^{-1}L^{-1}TQ^{-1}TL \\ &= [F]Q^{-2}T^2: \quad \mathrm{N/A^2} = \mathrm{T\cdot m/A}\end{aligned} \tag{8.22}$$

である．（次元の T は時間，SI 単位の T は磁束密度の単位テスラを表す．）μ_0 の値については次章で学ぶ．

このように，運動している電荷に力をおよぼす場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と，その原因である電流に直結して定義される場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を独立に考えることは，論理構造を明らかにするのに便利である．また，電場の場合と同様に，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ のそれぞれが満たすマクスウェル方程式は，物質（磁性体）が存在するときも真

空中と同じ形で成立するので，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を区別して扱っておくと，物質が存在するときのマクロな磁場に対する理解や計算が容易になる．

場の名称

ここで場の名称について注意すると，電場の場合は，「電場の強さ」$\boldsymbol{E}$ が電荷にかかる力を生じる場であり，「電束密度」$\boldsymbol{D}$ は電荷に直接関係づけて定義した場であるのに対し，磁場の場合は「磁束密度」$\boldsymbol{B}$ が運動する電荷にかかる力を生じる場であり，「磁場の強さ」$\boldsymbol{H}$ は電流に直接関係づけて定義した場である．電荷に力をおよぼす場という意味では $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ が対応しているが，あとで学ぶように，同じ形の積分方程式（循環）で性質が記述できるという意味では $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ が対応している．ただし，このいずれかの対応に基づいて磁場を理解しようとしても限度がある．むしろ，これらの交差した対応関係をそのまま認めて正しく利用しつつ，より重要な場である $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ についての理解を深めようとするのがよい．

ビオ－サバールの法則

直線電流の周りの磁場が (8.1) のようになることは，ビオ－サバールの法則によって説明できる．それは，**電流素片** $I\,d\boldsymbol{r}'$ は点 $\boldsymbol{r}$ に磁場の強さ

$$d\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{I\,d\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} = \frac{I\,d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{8.23}$$

を生じているという，フランスのビオ（J. B. Biot，1774 - 1862）とサバール（F. Savart，1791 - 1841）が発見した法則である．電流回路 l 全体を流れる電流 I が点 $\boldsymbol{r}$ に作る磁場の強さはその和（積分）で表され

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \oint_l d\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \oint_l \frac{I\,d\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} = \oint_l \frac{I\,d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{8.24}$$

である．

少々唐突にこの法則を導入したが，以下に示すように，電場についてのク

ーロンの法則についてわれわれが理解していることに基づいて推論するとこれでよさそうである.（本当に正しいかどうかは，これが実験事実を説明できたときにはじめて確認される.）

（1）　まず，点電荷 q の周りの $\boldsymbol{E}$ はクーロンの法則（1.31）

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \propto \frac{q}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

にしたがうが，これは，電束密度の場（3.7）

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$$

を定義して，電場の強さはそれに比例して（3.13）

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}$$

で与えられるとすることによって説明できた.

（2）　いま，直線電流の周りの磁場 (8.1) を説明しようとしているのであるが，線電荷密度 λ の直線電荷分布の周りの電束密度（3.78）は，これに似た関数形

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\xi}\boldsymbol{e}_\xi$$

をしている.これを§3.7 ではガウスの法則から求めたが，クーロンの法則の重ね合せの原理から，直線を細かく分けて各部分からの寄与を加え合わせた積分

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda\,\boldsymbol{e}_{r-r'}\,dl'}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} \tag{8.25}$$

からも得られる.（第 2 章 演習問題［5］）

（3）　このことから，電流 I の周りの磁束密度と磁場の強さも，電流を細かく分けた部分，すなわち電流素片 $I\,d\boldsymbol{r}$ の寄与がクーロンの法則に似た形で書けて，それを加え合わせた積分で電流全体が作る磁場を表すことができるのではないかと予想できる.違いは，直線電荷の場合の電場が $\boldsymbol{e}_\xi$ 方向を向いているのに対し，直線電流の周りの磁場は $\boldsymbol{e}_\varphi$ の方向を向いていることだけで

ある．そこで，電場の場合の分子の $\lambda\,dl'\,\boldsymbol{e}_{r-r'}$ の部分を，ベクトル積を使って $I\,d\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{e}_{r-r'}$ に置き換えればいいのではないかと考えられる．つまり，直線電流の周りの磁場は，係数も含めて (8.18)〜(8.20) で表せるであろう．

（4） そうするとさらに，回路が直線でない場合にも，和をとる前の電流素片 $I\,d\boldsymbol{r}'$ が点 $\boldsymbol{r}$ に作る磁場は (8.23) で，よって全回路が作る磁場は (8.24) で表されるのではないかと予想できる．

§8.5　ビオ－サバールの法則の応用

ビオ－サバールの法則を用いて，電流の周りの磁場を計算してみよう．

まず，直線電流の周りの磁場が確かに (8.1) になるかどうか確かめる．直線電流を z 軸とする円筒座標で記述する．

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \tag{8.26}$$

とし，θ を図 8.6 のように定めると，$\boldsymbol{r}' = z'\,\boldsymbol{e}_z$ の位置の電流素片 $I\,d\boldsymbol{r}' = I\,dz'\,\boldsymbol{e}_z$ が点 $\boldsymbol{r}$ に作る磁場の強さは

$$d\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{I\,dz'\,\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi R^2} = \frac{I\,dz'\sin\theta}{4\pi R^2}\,\boldsymbol{e}_\varphi \tag{8.27}$$

である．$\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_{r-r'} = \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi$ を利用した．直線電流のどの部分からの寄与も同じ $\boldsymbol{e}_\varphi$ の向きだから，大きさの和

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\theta\,dz'}{R^2} \tag{8.28}$$

だけを計算すればよい．$\boldsymbol{r}$ の z 座標を z とすると

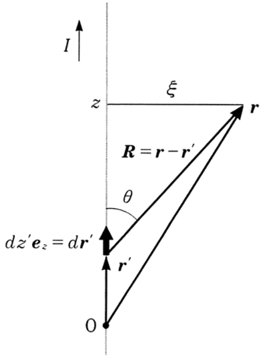


図 8.6

$$z' - z = -\xi\cot\theta \qquad \text{だから} \qquad dz' = \frac{\xi\,d\theta}{\sin^2\theta} = \frac{R^2}{\xi}\,d\theta \tag{8.29}$$

$$z' = -\infty \to \infty \qquad \text{のとき} \qquad \theta = 0 \to \pi \tag{8.30}$$

だから

$$H = \frac{I}{4\pi\xi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = -\frac{I}{4\pi\xi}\Big[\cos\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{I}{2\pi\xi} \tag{8.31}$$

である．よって直線電流の周りの磁場は

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{2\pi\xi}\boldsymbol{e}_{\varphi}, \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\frac{I}{2\pi\xi}\boldsymbol{e}_{\varphi} \tag{8.32}$$

であることがわかる．確かに，実験で得られる磁場の形を説明している．

対称性がよい電流回路の周りの磁場を求めるには，次節で学ぶアンペールの法則を利用できるが，対称性の低い，あるいは対称性のない電流回路の周りの磁場を求めるときには，ビオ - サバールの法則が威力を発揮する．電流分布が完全にわかっていれば，コンピュータを用いた数値計算で磁場の分布を完全に知ることができるからである．たとえば，図 8.7 のような半径 a の円形の回路 C を大きさ I の電流が流れている場合の磁場はほぼ図に示すように分布していることが，(8.24)から計算できる．下の例題および演習問題［5］に示すように，中心軸上の磁場は解析的にも計算できる．

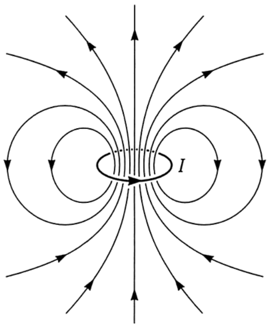


図 8.7

例題 8.3

図 8.7 のような半径 a の円形回路に電流 I が流れているときの，中心における磁束密度を求めなさい．

［**解**］ 図 8.8 のように中心を原点として，回路に垂直な軸を z 軸とする円筒座標で表示する．回路の一部 $d\boldsymbol{r}'$ が中心 $\boldsymbol{r} = 0$ に作る磁場の強さは，(8.23) において $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'} = \boldsymbol{e}_{-\boldsymbol{r}'} = -\boldsymbol{e}_{\xi'}$ だから

$$dH(0) = \frac{I\,d\boldsymbol{r}' \times (-\,\boldsymbol{e}_{\xi'})}{4\pi a^2}$$

$$= \frac{-\,I\,dl'\,\boldsymbol{e}_{\varphi'} \times \boldsymbol{e}_{\xi'}}{4\pi a^2}$$

$$= \frac{I\,dl'}{4\pi a^2}\boldsymbol{e}_z \qquad (8.33)$$

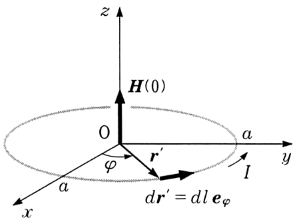


図 8.8

である．よって，回路全体が中心に作る磁場の強さは

$$\boldsymbol{H}(0) = \oint_{\mathrm{C}} d\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi a^2}\boldsymbol{e}_z \oint_{\mathrm{C}} dl'$$

$$= \frac{I}{4\pi a^2} 2\pi a\,\boldsymbol{e}_z = \frac{I}{2a}\boldsymbol{e}_z \qquad (8.34)$$

したがって，中心位置の磁束密度は

$$\boldsymbol{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{2a}\boldsymbol{e}_z \qquad (8.35)$$

である．

§8.6　アンペールの法則

電流と磁場の関係を表す場の法則をアンペールの法則という．ビオ－サバールの法則からの厳密な導出は省略し，直線電流の場合からの類推で求めよう．

図 8.9 のような直線電流上の一点を中心とし，直線に垂直な面内の半径 ξ の円 C に沿っての $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の循環は，

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_{\mathrm{C}} \frac{I}{2\pi\xi}\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi\,\xi\,d\varphi$$

$$= \frac{I}{2\pi}\oint_{\mathrm{C}} d\varphi = \frac{I}{2\pi}2\pi$$

$$= I \qquad (8.36)$$

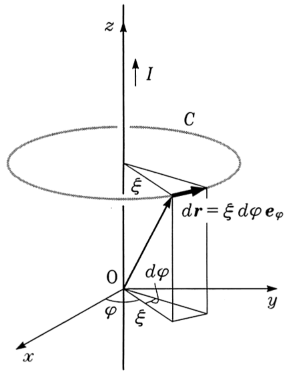


図 8.9

である．$\boldsymbol{e}_\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_\varphi \cdot \xi\, d\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi = \xi\, d\varphi$ を用いた．

次に，図 8.10 のような直線電流の周りの任意の閉曲線 l の場合も

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_l \frac{I}{2\pi\xi}\boldsymbol{e}_\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = \oint_l \frac{I}{2\pi\xi}\xi\, d\varphi = \frac{I}{2\pi}\oint_l d\varphi = \frac{I}{2\pi}2\pi = I \qquad (8.37)$$

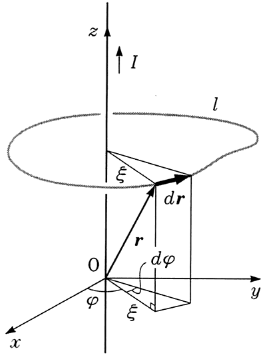


図 8.10

である． 電流 I が閉曲線 l を外周とする面を貫いていないときは，

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_l d\varphi = 0 \qquad (8.38)$$

である．証明は (2.78) を導いたのと同様の議論を閉曲線 l が張る角度 φ について行えばよい．

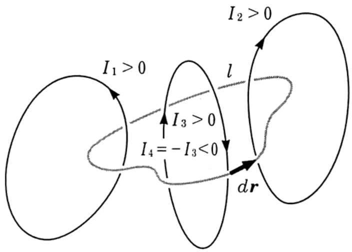


図 8.11

図 8.11 のような複数の電流回路についても，任意の閉曲線 l に沿っての $\boldsymbol{H}$ の循環が

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \sum_{(l\text{を縁とする任意の面を貫く})} I_i \qquad (8.39\text{ a})$$

を満たすことを証明できる．これを**アンペールの法則**という．I_i の正の向きは，$d\boldsymbol{r}$ の向きに回した右ネジが進む向きにとる．証明は省略する．

図 8.11 の I_3 と I_4 のように，l と鎖交して（からみ合って）いない回路を流

れる電流は，面を複数回貫いて互いに打ち消し合うので無視して，

$$\int_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \sum_{(l\text{と鎖交する})} I_i \qquad (8.39\,\mathrm{b})$$

と書くこともある．

図 8.12 のように，電流が細い導線の内部だけでなく空間に広がって電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ で流れている場合は，(8.39) は

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (8.40)$$

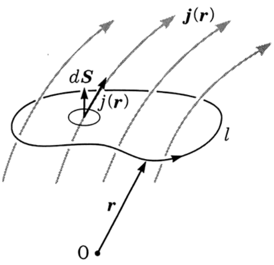


図 8.12

と書ける．S は l を周囲とする任意の曲面である．面素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ の向きは，$d\boldsymbol{r}$ の方向に回した右ネジが進む向きにとるものと約束する．面電流や線の上を流れる電流の場合は $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ は無限大に発散しているから (8.40) では表せない．(8.39) あるいは (8.40) は，第 3 番目の**マクスウェル方程式**（積分形）の，場が定常的な場合の表式である．時間的に変動する場を含む完全な方程式は，右辺に変位電流密度に関係する項が加わり次式となる（第 9 章参照）．

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{S}} \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (8.41)$$

§8.7　アンペールの法則の応用

電荷分布の対称性が良い場合にガウスの法則を用いると簡単に電場を求めることができたように，電流分布の対称性が良い場合にはアンペールの法則から磁場を求めることができることがある．(8.39)の積分を積に直すことができる場合である．

［例 1］　半径 a の円柱状導体を一様な密度 j で流れる電流 I の周りの磁

場（図 8.13）

導体に沿って電流の向きに z 軸をとると，

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = j\,\boldsymbol{e}_z, \quad j = \frac{I}{\pi a^2} \quad (\xi \leqq a),$$
$$j = 0 \quad (\xi > a) \qquad (8.42)$$

である．対称性より $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = H(\xi)\,\boldsymbol{e}_\varphi$ だから，導体の軸上に中心をもつ半径 ξ の円を C とすると，(8.40) の左辺は，$d\boldsymbol{r} = \xi\, d\varphi\, \boldsymbol{e}_\varphi$ を考慮して

$$\oint_C \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C H(\xi)\,\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi\,\xi\, d\varphi$$
$$= H(\xi)\,\xi \oint_C d\varphi$$
$$= 2\pi\xi\, H(\xi) \qquad (8.43)$$

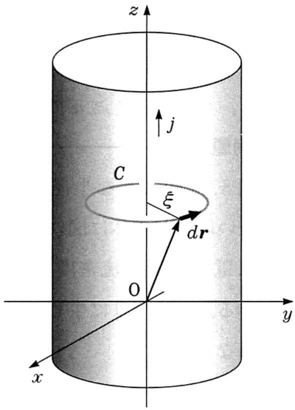


図 8.13

右辺は，

$$\xi \leqq a \quad のとき \quad \int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = \pi\xi^2 j \qquad (8.44)$$

である．よって，

$$H(\xi) = \frac{j}{2}\xi \qquad (8.45)$$

だから，向きも含めて

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{j}{2}\xi\,\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\frac{j}{2}\xi\,\boldsymbol{e}_\varphi \qquad (8.46)$$

である．また，

$$\xi \geqq a \quad のとき \quad \int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = \pi a^2 j = I \qquad (8.47)$$

である．よって

$$H(\xi) = \frac{a^2 j}{2\xi} \qquad (8.48)$$

だから，向きも含めて

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{a^2 j}{2\xi}\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{I}{2\pi\xi}\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\frac{a^2 j}{2\xi}\boldsymbol{e}_\varphi = \mu_0\frac{I}{2\pi\xi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{8.49}$$

である．つまり，$\xi \geqq a$ では，直線電流の場合と同じ式で表される．

例題 8.4

図 8.14 のような半径 a の無限に長い円筒状導体に図に示した方向に電流が面電流密度 $\boldsymbol{J}$ で流れている．この周りに生じる磁場を求めなさい．

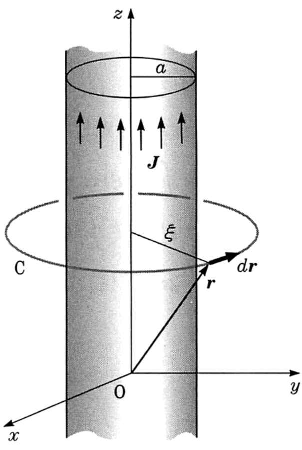


図 8.14

［解］　面電流を含む場合だから，(8.39) で考える．対称性より $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = H(\xi)\boldsymbol{e}_\varphi$ だから，円筒と同心の半径 ξ の円を C とすると，左辺は (8.43) 同様

$$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = 2\pi\xi H(\xi) \tag{8.50}$$

である．右辺は $\xi < a$ のとき 0 だから，

$$H(\xi) = 0 \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{8.51}$$

である．また，

$\xi > a$ のとき円 C の面を貫く電流は円筒の切り口の円を横切って流れる電流の

総量で,

$$I = 2\pi aJ \tag{8.52}$$

である．よって

$$H(\xi) = \frac{2\pi aJ}{2\pi\xi} = \frac{aJ}{\xi} \tag{8.53}$$

である．向きも含めると

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{aJ}{\xi}\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\frac{aJ}{\xi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{8.54}$$

である．これを J でなく I で表すと，$\xi > a$ では，直線電流の場合と同じ式で表される．なお，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は $\xi = a$ で不連続だから $\xi = a$ での磁場は決められない．

［例 2］　無限に長いソレノイドの周りの磁場

図 8.15 のように，導線をコイル状に長く巻いたものをソレノイドという．半径 a の無限に長いソレノイドに電流 I が流れている場合の磁場を考える．導線の巻き数は，1 m 当り n 回であるとする．このソレノイドの内外に磁場があるとすると，軸に平行で，大きさは中心軸からの距離のみに依存することを証明することができる．中心軸を z 軸とする円筒座標を用いると，

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = H(\xi)\,\boldsymbol{e}_z \tag{8.55}$$

である．証明は少し込み入っているので省略し，これを前提として磁場の大きさを求めよう．

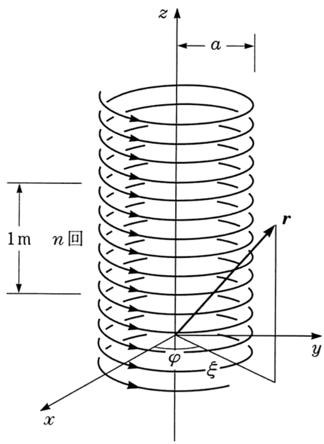


図 8.15

まず，ソレノイドの内部に，図 8.16 のような軸に平行な辺をもつ任意の長方形の経路 ABCD を考えると，(8.39) の左辺は

$$\oint_{ABDC} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= \int_A^B \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_B^C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_C^D \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_D^A \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= \int_A^B H(\xi_A)\,\boldsymbol{e}_z\cdot dz\,\boldsymbol{e}_z + 0 + \int_C^D H(\xi_D)\,\boldsymbol{e}_z\cdot(-dz)\,\boldsymbol{e}_z + 0$$

$$= H(\xi_A)\,l - H(\xi_D)\,l \qquad (8.56)$$

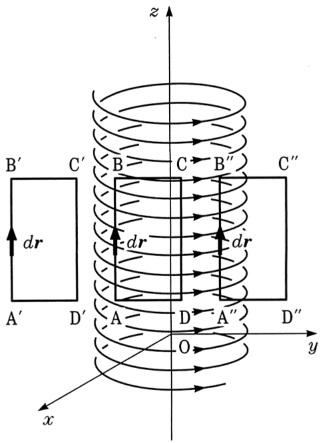


図 8.16

で右辺は 0 だから

$$H(\xi_A)\,l - H(\xi_D)\,l = 0 \qquad (8.57)$$

$$\therefore \quad H(\xi_A) = H(\xi_D) \qquad (8.58)$$

である．長方形は任意だから，内部の磁場は実は ξ によらず一定

$$H(\xi) = H_{in} \qquad (\xi < a) \qquad (8.59)$$

であることがわかった．

次に，このソレノイドの外側に，軸に平行な辺をもつ図のような長方形の経路 A′B′C′D′ を考えると，上と全く同様な議論によって，外側の磁場も実は ξ によらず一定

$$H(\xi) = H_{out} \qquad (\xi > a) \qquad (8.60)$$

であることがわかる．これは，無限遠でも磁場の強さは H_{out} であることを意味するが，無限遠では $H(\infty) = 0$ のはずだから，いたるところ

$$H(\xi) = 0 \qquad (\xi > a) \qquad (8.61)$$

でなければならないことがわかる．

それではもとにもどって H_{in} の値はどうであろうか．それを知るために，ソレノイドをまたぐような，軸に平行な辺をもつ長方形の経路 A″B″C″D″ を考

える．(8.39) の左辺は辺 A″B″ の部分以外の寄与は 0 で，

$$\oint_{\mathrm{A''B''C''D''A''}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{A''B''}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = H_{\mathrm{in}} l \tag{8.62}$$

である．右辺の面素 $d\boldsymbol{S}$ の向きは，$d\boldsymbol{r}$ の向きとの関係から，紙面の手前から向こうへ向かう向きで，これはソレノイドの電流と同じ向きである．(図の ⊗ は紙面の手前から裏側に向かうベクトルを表す.）また，ソレノイドの導線がこの長方形を nl 回貫いていることから，結局 右辺は $nlI\,(>0)$ に等しい．よって，

$$H_{\mathrm{in}} l = nlI \tag{8.63}$$

だから，向きも含めて書くと，内部では

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = nI\,\boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 nI\,\boldsymbol{e}_z \qquad (\xi < a) \tag{8.64}$$

である．

以上は無限に長いソレノイドに対するものであるが，十分に長いソレノイドの両端付近以外の部分についても近似的に上の議論が可能だから，(8.64) が成り立つ．

例題 8.5

導線を図 8.17 のように中空のドーナツ状に巻いたコイルをトロイドあるいはトロイダルコイルという．内部にはドーナツの断面の中心に沿った同心円状の磁場が生じる．このコイルの内半径を R_1, 外半径を R_2, コイルの断面の半径を a, 全巻き数を N とするとき，電

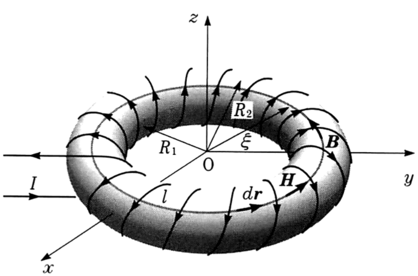


図 8.17

流 I を流したときの内部の磁場を求めなさい．

［解］ 図 8.17 のような円筒座標で考え，トロイドの内部を通る半径 ξ の円の周を l とする．内部の磁場は $\boldsymbol{e}_\varphi$ に平行で大きさは φ に依存しないから

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = H(\xi, z)\,\boldsymbol{e}_\varphi \tag{8.65}$$

である．よって (8.39) の左辺は

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_l H(\xi, z)\,\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi\,dl = H(\xi, z)\oint_l dl = 2\pi\xi H(\xi, z) \tag{8.66}$$

である．一方右辺は，l を外周とする面を電流 I が N 回貫いているから，NI である．よって，

$$2\pi\xi H(\xi, z) = NI \qquad \text{より} \qquad H(\xi, z) = \frac{NI}{2\pi\xi} \tag{8.67}$$

よって，向きも含めて

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{NI}{2\pi\xi}\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\frac{NI}{2\pi\xi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{8.68}$$

である．これは，z に依存しないので，軸からの距離 ξ が等しい点は同じ大きさの磁場であることがわかる．また，R_1，R_2，a 等にも依存しない．

§8.8　電流が受ける力

われわれはすでに，速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している電荷がローレンツ力 (1.7) を受けることを知っている．電流は電荷の運動で生じているから，磁場中に置かれた電流が力を受けるであろうことは容易に認めることができる．そこで，これまで学んだことを利用して，§8.1 の実験事実 (2) の説明を試みよう．

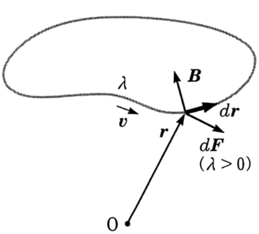


図 8.18

まず，磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 中に置かれた導線の無限小部分 $d\boldsymbol{r}$ が受ける力を求める．図

8.18のように導線を線密度 $\lambda(\boldsymbol{r})$ の電荷が速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ で流れているとすると，電流は

$$I = \lambda v \tag{8.69}$$

である．一方，微小部分 $d\boldsymbol{r}$ の中を流れている電荷は

$$dq = \lambda|d\boldsymbol{r}| = \lambda\, dl \qquad \text{で} \qquad d\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \tag{8.70}$$

であるから，この部分が受ける力はその電荷が受ける力に等しく，

$$d\boldsymbol{F} = dq\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \lambda\, dl\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \lambda v\, d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} = I\, d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{8.71}$$

これから，図8.19のように距離 a だけ離れた平行直線電流 I_1 と I_2 の間の力を求めることができる．まず，I_1 が I_2 の位置に作る磁場は，I_1 の上に原点をとり I_1 の向きに z 軸をもつ円筒座標で表示すると，(8.32)より導線2の上の至るところ同じで，

$$\boldsymbol{B}_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi a} \boldsymbol{e}_\varphi \tag{8.72}$$

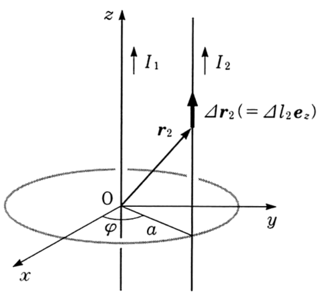


図8.19

である．よって，電流 I_2 の部分 $\Delta\boldsymbol{r}_2$（微小である必要はない）が受ける力は（8.71），（8.72）より

$$\Delta\boldsymbol{F}_{21} = I_2 \Delta\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}_2) = I_2 \Delta l_2\, \boldsymbol{e}_z \times \mu_0 \frac{I_1}{2\pi a} \boldsymbol{e}_\varphi = -\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi a} \Delta l_2\, \boldsymbol{e}_\xi \tag{8.73}$$

である．$\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{e}_\xi$ を用いた．この力は，導線2の部分の長さ Δl_2 に比例しているから，単位長さ当りの力の大きさで表すと

$$f_{21} = \frac{\Delta F_{21}}{\Delta l_2} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi a} \tag{8.74}$$

となる．これで，(8.2)の比例関係が導かれた．なお，両辺の次元は $[F]L^{-1}$

なので，本書で力を表すのに用いてきた F とは異なる文字 f を用いた．

§8.9　アンペアとクーロンの定義

われわれはまだ，(8.74) の比例係数 μ_0 の値を知らない．実は，(8.74) こそがSI単位系において1A (**アンペア**) の電流の大きさを定めるための関係式である．その過程で μ_0 の値も決まる，というより，決める．

同じ大きさ I の直線電流が平行に流れている場合の，片方の導線1m当りの力は，(8.72) において $a=1$，$I_1=I_2=I$ とおいて，

$$f=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \tag{8.75}$$

である．この式は，μ_0 と I の2つの量が未定である．どちらかは勝手に決めざるをえない．SIでは，電流の単位である1Aが，以前使われていた実用電磁単位系での1Aの大きさに一致するように**真空の透磁率**の大きさを

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\quad \mathrm{T\cdot m/A} \tag{8.76}$$

と決める．そうすると

$$f=2\times10^{-7}I^2 \tag{8.77}$$

である．これは，1m離れた平行電流の間の力が1m当り 2×10^{-7} N であるような電流を1Aと決めたことに相当する．そして，1Aの電流が1sの間に運ぶ電荷の量を1C (**クーロン**) と定める．1Cの電荷の量が決まると，1m離れて置かれた1Cの電荷同士にはたらく力から，(3.15)に含まれる定数 ε_0 を定めることができる．それが (3.17) で与えられている値である．(実際にはクーロン力から ε_0 を決めるのは精度が低いので，マクスウェルの電磁波の理論によると真空中の光の速さが $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ で与えられることを利用して，c の精密測定から決める．)

例題 8.6

1辺の長さ10cmの正三角形の頂点を通り三角形の面に垂直な3本の

直線状導線に電流 I_1, I_2, I_3 が流れている．I_1 と I_2 は 10 A で同じ向き，I_3 は 5 A で逆向きのとき，I_3 が 1 m 当り受ける力の向きと大きさを求めなさい．

［**解**］ I_1, I_2 が I_3 の 1 m 当りにおよぼす力の大きさは，

$$f_1 = f_2 = \mu_0 \frac{10 \times 5}{2\pi \times 0.1} = \frac{250\mu_0}{\pi} \tag{8.78}$$

で，向きは図 8.20 に示すとおりである．(⊙ は紙面の裏から手前に向かう電流，⊗ は手前から紙面の裏に向かう電流を表す．）したがって，これを重ね合わせた 1 m 当りの力は

$$f = \sqrt{3}\, f_1 = \frac{250\sqrt{3} \times 4\pi \times 10^{-7}}{\pi}$$
$$= 1.73 \times 10^{-4}\ \mathrm{N/m} \tag{8.79}$$

である．

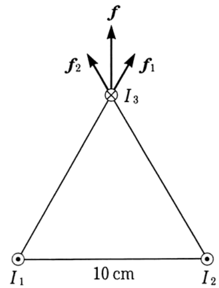


図 8.20

参考のために，μ_0 の値の由来についてもう少しくわしく説明しておこう．以前用いられていた実用電磁単位系では，ビオ - サバールの法則に 4π を含めずに，

$$d\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{I\, d\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{e}_{r-r'}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2} \quad \text{とし，かつ} \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} \ (\text{つまり，} \mu_0 = 1) \tag{8.80}$$

と定めていた．したがって，距離 a だけ離れた，同じ電流 I が流れる平行な直線電流間の単位長さ当りの力は，上の計算をくり返すと，(8.75) に 4π を乗じて μ_0 で除した

$$f = \frac{2I^2}{a} \tag{8.81}$$

である．これに基づいて，1 cm 離れて平行に置かれた 2 本の導線に同じ大きさの電流 I を流して 1 cm 当り 2 dyne（2 g·cm/s^2 = 2×10^{-5} N）の力のとき，$I = 10$ A と定義していた．(2 dyne としたのは (8.81) の分子の 2 を考慮したものであり，10 A としたのは，当時使われていた普通の電流の大きさを表す際にあまり小さな数にならないように配慮したためである．）

これに対して SI の前身である MKSA 有理単位系での電流の単位は (8.75) を用

いて定めたのであるが，実用電磁単位系で 10 A の電流を MKSA 有理単位系でも 10 A とよべるように，μ_0 の値を定めた．すなわち，

$$2\,\mathrm{dyne} = 2\times10^{-5}\,\mathrm{N}, \qquad 1\,\mathrm{cm} = 10^{-2}\,\mathrm{m} \tag{8.82}$$

だから

$$\frac{2\times10^{-5}}{10^{-2}} = \frac{\mu_0 10^2}{2\pi\times10^{-2}} \qquad \text{より} \qquad \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N/A^2(T\cdot m/A)} \tag{8.83}$$

となるのである．

ところで，現在の SI 単位系では，1 m の定義が「光が 1/299792458 秒間に真空中を進む距離」となっているので，光の速さは数値としては正確な整数で

$$c = 299792458\,\mathrm{m/s} \tag{8.84}$$

である．また，真空の誘電率 ε_0 と真空の透磁率 μ_0 と c の間には $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ なる関係があるので，

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi\times10^{-7}\times(299792458)^2}\ \mathrm{F/m} \tag{8.85}$$

で，無理数であるが正確な数値が決まっている．しかし，理論の枠組の中で値が決まっているのは μ_0 のみであり，c と ε_0 は SI 単位の 1 m の定義と連動して数値だけが決まっているに過ぎない．c と ε_0 のどちらか一方（精度からいえば当然 c，あるいは定義にさかのぼって 1 m）の実際の大きさは，実測によって定められるべきものである．

§8.10　電流ループにはたらく力と磁気モーメント

一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ 中に置かれた，辺の長さが a，b の長方形の電流ループ ABCD にはたらく力を考えよう．まず，図 8.21 のように，ループの面が磁場に垂直な場合を考える．大きさ I の電流が図の方向に流れているとすると，各辺にはたらく力はループを外に広げようとする向きであるが，辺 AB にはたらく力と

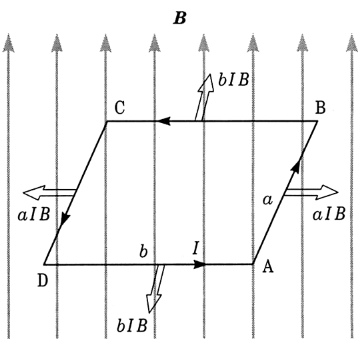


図 8.21

辺CDにはたらく力の大きさはともに aIB で等しく，また辺BCにはたらく力と辺DAにはたらく力の大きさはともに bIB で等しいので，すべての力の和は0である．したがって，このループは移動も回転もしない．

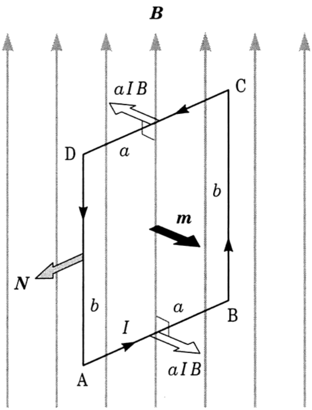


図8.22

次に，図8.22のように辺BCが磁場 $\boldsymbol{B}$ に平行に置かれた場合を考えると，辺BCと辺DAには力がかからないが，辺ABと辺CDには同じ大きさ aIB の力がはたらく．その向きは互いに逆なので合力はゼロであり，したがってこのループの重心は動かない．しかし，力の作用線がずれているから，ループを回転させようとするトルク（力のモーメント）はゼロではない．異なる作用線上にはたらく大きさが同じで向きが反対の力の対を**偶力**という．いまの場合，**偶力のモーメント** N の大きさは

$$N = (\text{距離}) \times (\text{力}) = abIB \tag{8.86}$$

である．$\boldsymbol{N}$ の向きは，偶力によって回転された右ネジが進む向きで，図に示してある．

このような電流ループに対して，

$$\boldsymbol{m} = abI\boldsymbol{n} = AI\boldsymbol{n} \tag{8.87}$$

で定義されるベクトル $\boldsymbol{m}$ を**磁気モーメント**という．A は電流ループの面積である．$\boldsymbol{n}$ は，電流が流れている向きに回したときに右ネジが進む向きにとった，電流ループの面の法線ベクトルである．これを用いると，向きも含めたトルクは

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{8.88}$$

で与えられる．この偶力のモーメントによってコイルは回転する．

磁気モーメントの次元と SI 単位は

$[m] = L^2QT^{-1}$：　　$\mathrm{A\,m^2 = J/T}$

である．

最後に，図 8.21 の状態から θ だけ回転した電流ループが受ける力を考えよう．図 8.23 は辺 AB に平行な方向から見た図である．辺 BC と辺 DA にはたらく力は等しく作用線が一致しているので合力，トルクともに 0 である．しかし，辺 AB と辺 CD にはたらく力は，作用線がずれているので，偶力である．そのトルクの大きさは

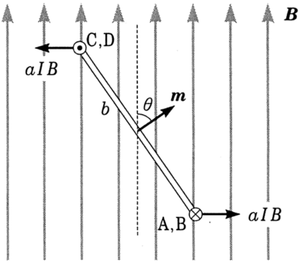


図 8.23

$$N = abIB\sin\theta \tag{8.89}$$

である．よって，向きも含めてトルク $\boldsymbol{N}$ はこの場合も（8.88）で表される．

(8.87)を長方形の電流ループに対して定義して(8.88)を導いたが，これは任意の形の微小な電流ループに対して成り立つ．$\boldsymbol{m}$ はループの面積 A と電流 I のみで決まり，その形には依存しない．したがって，その形や面積や電流値を問題にしても意味がなく，磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ だけが意味がある．

電子はその**スピン**に付随する磁気モーメントをもっている．電子には大きさがないから内部に電流ループがあるわけではないが，その磁気モーメントが磁場から受けるトルクは，量子的な効果を除けば，上のように定義された磁気モーメントと同じ性質をもっており，磁場からトルク（8.88）を受ける．原子核のスピンに由来する磁気モーメントや，電子の軌道運動に由来する磁気モーメントについても（8.88）でトルクを議論することができる．

§8.11　磁気モーメントの周りの磁場

有限の面積をもつ円形電流ループの周りの磁場の概形は図 8.7 に示されて

いる．いま，電流 I が一定のままこの電流ループの面積 A を小さくしていくと，周りの磁場は弱くなる．しかし，もし，磁気モーメントの大きさ

$$m = AI \tag{8.90}$$

を一定に保つように I を増加させながら A を小さくしていくと，ループが点状になっても周りの磁場の大きさは変らない．その概形は図 8.24 のようになる．これが，磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ の周りの磁場である．電気双極子モーメントの周りの電場（図 4.18）によく似ているが，実際これらは全く同じ形をしている．しかし，電気双極子モーメントが基本的に図 4.16 のような正負の電荷の対から生じたものであるのに対して，磁気モーメントは図 8.7 のように電流ループから生じたものであることは大きな違いである．

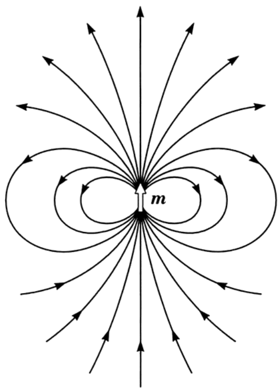


図 8.24

§8.12　磁束密度に対するマクスウェル方程式

静電場の源は電荷であり，その周りに（3.35）を満たす電束密度ベクトル $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ が発生していると考えた．一方，磁場の源は電流である．磁場は電流の周りを回るような形で生じている．電場のように一方的に湧き出す源は存在しない．このため，任意の閉曲面 S を貫く磁束の総和は

$$\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{8.91}$$

のはずである．S の内部に電流が流れている部分が含まれていてもよい．これを磁束密度に対するガウスの法則という．これが，第 4 番目の**マクスウェル方程式**であり，場が時間に依存する場合にも，このままで常に成り立ってい

る．電子の軌道運動に付随する磁気モーメントや，電子や原子核のスピン角運動量に付随する磁気モーメントも磁場を作るが，その性質は電流ループの磁気モーメントと同じだから，物質が存在する場合も（8.91）は常に成り立つ．

なお，任意の面 S を貫く磁束は

$$\Phi = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \tag{8.92}$$

であるが，その次元と SI 単位は

$$[\Phi] = [B]L^2 = Q^{-1}L^2MT^{-1}: \qquad \mathrm{T\,m^2 = Wb = weber}\ (\textbf{ウエーバー}) \tag{8.93}$$

である．

演習問題

［1］ $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$ 等とするとき，つぎの等式を示しなさい．

（a） $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

（b） $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})$

［2］ 1 A の電流が流れている直線状導線から 10 cm 離れた点の磁束密度を求めなさい．

［3］ 電流 I が流れる直線導線を含む面内に，電流に平行な辺の長さ a，垂直な辺の長さ b の長方形の面がある．電流に近い側の平行な辺と電流との距離が x のとき，この面を貫く磁束を求めなさい．

［4］ 辺の長さが 10 cm，5 cm の長方形の回路が，長さ 10 cm の辺が直線導線から 1 cm 離れて平行になるように，直線導線と同一平面上に置かれている．直線導線と長方形回路ともに 10 A の電流が流れているとき，長方形回路が受ける力を求

めなさい．

［5］ビオ－サバールの法則を用いて，水平に置かれた半径 a の円形回路に，電流 I が上から見て反時計回りに流れているときの中心軸上の磁束密度を求めなさい．鉛直上向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする．また，$a = 10\,\mathrm{cm}$，$I = 1\,\mathrm{A}$ のとき，中心および中心から高さ 10 cm の点の磁束密度を計算しなさい．

［6］1 辺の長さが $2a$ の正方形の回路に電流 I が流れているときに，中心の位置にできる磁場を求めなさい．

［7］1 cm 当り 20 回の割で巻いた十分長いソレノイドに 10 A の電流を流したときの内部の中央付近の磁場の強さと磁束密度を求めなさい．

［8］半径 a の球の表面が面電荷密度 σ に帯電している．これをひとつの直径を軸にして角速度 ω で回転させたときの中心における磁場を求めなさい．

［9］幅 a，長さ l の 2 枚の平板が向かい合せに距離 $d\,(\ll a, l)$ で置かれている．この平板の長さ a の辺の片方に起電力 $\mathcal{E}$ の電源，他方に抵抗をつないで，電流 I を流した．電流は面内を一様に流れるとして，面電流密度と中央付近の磁場を求めなさい．

［10］中心軸が一致する半径 a および $b\,(>a)$ の円筒状導体に電流 I を流す．

（a）それぞれの面電流密度の大きさを求めなさい．

（b）電流が同じ向きのときの周りの磁場を求めなさい．

（c）電流が互いに逆向きのときの周りの磁場を求めなさい．

［11］半径 5 cm の円形回路が $B = 0.1\,\mathrm{T}$ の一様な磁場の中にある．この回路に 1 A の電流を流したとき，最も大きなトルクを受けるのは回路の向きがどのような場合で，トルクの大きさはいくらか．また，トルクが 0 になるのは回路の向きがどのような場合か．

9 時間的に変化する場
電磁誘導・変位電流密度

これまで，電荷が全く動かず静電場しか存在しない状態，または，運動している電荷も存在するがその流れを表す電流密度分布 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ が時間的に変化しないために静電場と静磁場しか存在しない場合を考えてきた．ここでは，電荷分布や電流分布が時間的に変化する場合を考える．しかし，電磁波の発生が無視できなくなるほどの急激な変化はないものとする．

§9.1 電磁誘導に関する実験事実

ファラデーは，電流の周りに磁場ができるのならば，逆に，磁場の周りに置かれた導線に電流が流れているのではないかと考えて，さまざまな実験を行った．しかし，そのような証拠を見出すことはできなかった．しかし，

（1） 図9.1のように回路を貫く磁束が時間的に変化すると，回路に電流が流れる．

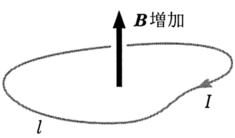


図9.1

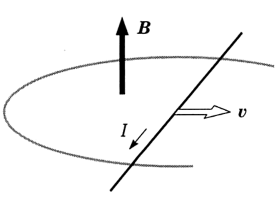


図9.2

（2） 磁場が時間的に変化しなくても，図 9.2 のように磁場が存在する場所で回路の一部が動くと，その回路に電流が流れる．

という二つの現象を見出した．さらに，ドイツのレンツ (H. F. E. Lenz, 1804 - 1865) はこれらの現象の電流の向きについて，

（3） (1) の現象で流れる電流は，その電流によってあらたに生じる磁場が，回路を貫く磁束の変化を打ち消すような向きに流れる．

（4） (2) の現象で流れる電流は，原因となっている回路の一部の動きを妨げる力が生じるような向きに流れる．

ことを見出した．(1)，(2) の現象は似ているが異なる現象であり，(1) のみがマクスウェル方程式で表現される．

§9.2 回路を貫く磁場が変化する場合

まず，**電磁誘導**とよばれる上記 (1) の現象を考える．磁束密度が変化するとその周りの空間には電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ が誘起される．これを**誘導電場**という．誘導電場は静電場と違って**起電力**を生じる．それを記述するために，空間内に図 9.3 のように閉曲線 l を考える．その閉曲線上をたどる $d\boldsymbol{r}$ の向きは 2 通りあるが，その向きを任意に定める．このとき，循環

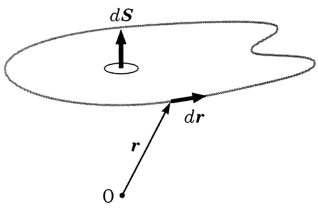


図 9.3

$$\mathcal{E} = \oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{r} \tag{9.1}$$

を**誘導起電力**という．$\mathcal{E} > 0$ ならあらかじめ決めた $d\boldsymbol{r}$ の向きに電流を流そうとする起電力，$\mathcal{E} < 0$ なら逆の向きに電流を流そうとする起電力である．

この起電力と，l を外周とする面 S を貫く磁束

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{9.2}$$

Φ との間の関係を実験事実に即して書きたい．まず磁束の符号が曖昧にならないように，(9.2) の $d\boldsymbol{S}$ の向きを (9.1) の $d\boldsymbol{r}$ の向きに回した右ネジが進む向きと決める．これで，スカラー量である磁束 Φ およびその変化の正の向きもその方向に選んだことになる．向きについての以上の約束のもとに，ファラデーの発見をレンツの確認した向きを考慮して表現すると，任意の閉曲線 l 上に生じる起電力と l を外周とする任意の面を貫く磁束との間に

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{9.3}$$

なる関係があることになる．くわしい測定の結果，全く異なる物理量である (9.3) の左辺と右辺は，単なる比例の関係ではなく，数値的にも等しいことがわかっている．この驚くべき事実は，電場と磁場が深いところで統一された存在であることを示唆している．(9.3) に (9.1) を代入すると，

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{9.4}$$

である．さらに，(9.2) を代入すると，

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{9.5}$$

である．これは (4.10) の拡張になっている．(4.10) は静電場（クーロン電場）が満たす方程式であった．(9.5) は誘導電場に対して導いた式であるが，その左辺の $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ に静電場が含まれていてもよい．(4.10)からわかるように，静電場に対してこの循環は 0 だからである．このように (9.5) の $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ として静電場と誘導電場を含めたものが，**マクスウェル方程式**の第

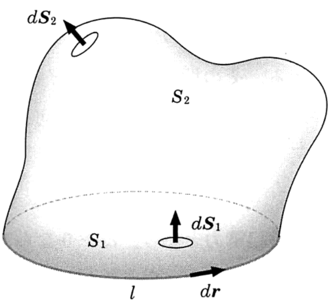


図 9.4

2式の完成した形である．

なお，同じ閉曲線 l を外周とする曲面は無数に考えられるが，図9.4のようにそのうちの2個を S_1，S_2 とするとき，

$$\int_{S_1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_1, t)\cdot d\boldsymbol{S}_1 = \int_{S_2}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_2, t)\cdot d\boldsymbol{S}_2 \tag{9.6}$$

であり，したがってこの両辺の時間微分も常に等しい．これは磁束密度に関するガウスの法則から明らかである．よって，(9.5) は，確かに l を外周とする任意の曲面について成り立つ．また，図9.5のように回路が同じ磁束を N 回巻いていれば，その両端の誘導起電力は

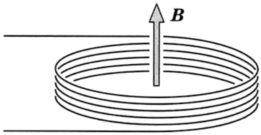


図9.5

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi}{dt} \tag{9.7}$$

のように N 倍になる．

例題 9.1

(9.6) を示しなさい．

［**解**］ 曲面 S_1 と S_2 で作られる閉曲面について，磁束密度に対するガウスの法則 (8.91) を適用すると，

$$\oint_{S_1+S_2}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{S_1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_1)\cdot d\boldsymbol{S}_1 + \oint_{S_2}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_2)\cdot d\boldsymbol{S}_2 = 0 \tag{9.8}$$

である．ただし，ガウスの法則を考えるときは $d\boldsymbol{S}$ は閉曲面の外向きの面素ベクトルだから，S_1 については向きが図9.4とは逆になる．それを $\bar{S}_1$ で表した．この第1項について $d\boldsymbol{S}$ の向きを (9.5) における約束（図9.4）のように $d\boldsymbol{r}$ に対して右ネジが進む向きにとると，積分の値の符号が変るから

$$-\oint_{S_1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_1)\cdot d\boldsymbol{S}_1 + \oint_{S_2}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_2)\cdot d\boldsymbol{S}_2 = 0 \tag{9.9}$$

である．

(9.5) は積分（循環）で書かれた法則である．これは自然界に存在しうる電場について強い制限を与えているが，各点における電場を決めるのに必要十分な情報までは与えてはいない．空間のある部分の磁束密度の時間的な変化によって生じる電場がどのような関数形をとるかは，境界条件，つまり，磁束密度が空間のどの範囲でどのように変化しているか，また，電位を決める導体の分布がどうなっているか，等に依存する．しかし，いかなる場合でも，(9.5) のような和（積分）についての法則は常に成り立っている．

§9.3　誘導電流

(9.5) は，場に対する方程式である．空間の至るところに誘導電場が生じていることを表している．電流が流れるかどうかは別問題である．空間に導体がなければ電流は流れようがない．しかし，空間に実際の導線でできた回路が存在するときは，その回路を電流が流れる．その電流の原因となる起電力は，回路を閉曲線 l として (9.1) すなわち (9.5) の左辺で与えられる．流れる電流 I は，回路全体の抵抗 R で決まり

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \tag{9.10}$$

である．これを**誘導電流**という．もしこの回路が絶縁体のひもでできている場合は，それに沿って同じ起電力が生じているにもかかわらず，抵抗が大きすぎて（あるいは自由電子がほとんど存在しないために）電流は流れない．このように，ファラデーが誘導電流を通して見出した電磁誘導の法則の本質は誘導電場にある．

ところで，誘導電場が発生している空間に1個の荷電粒子を置くと，その粒子は空間内の電場分布と初期条件（電子の位置と初速度）によって決まる軌道をたどる．ところが，その空間に実際に導線の回路が存在するときは，回路がどのような形であっても電荷は導線に沿って流れる．これはなぜだろうか．導線の存在によって誘導電場は変化しないし，また一般に誘導電場は，

任意に置かれた回路の接線方向を向いているわけではないから，不思議である．実は，導線内の電荷はまず誘導電場に沿って運ばれ，導線の表面に達してそこに蓄積する．これによって生じるクーロン電場が誘導電場に重ね合わさって，導線内の電場がすべて導線に平行になり，電荷は導線内部を導線に沿って流れるようになる．これがわれわれの観測する誘導電流である．

導線の回路ではなく，平面導体が置かれている場合は，複雑である．といっても，誘導電場の分布が変るわけではない．導体内の電荷は平面内を自由に動き，かつ，平面の縁に蓄積する．蓄積した電荷によるクーロン電場と誘導電場とが重なりあって，平面内を動く電荷の流れを作る．これを**渦電流**という．一般に渦状に流れているからである．ただし，その渦の様子は，磁束密度の変化の分布と導体の形できまる境界条件を正しく考慮した数値計算をしないと描くことはできない．

再び空間内の荷電粒子の話にもどろう．誘導電場を利用して空間内の荷電粒子をこちらの望む軌道を運動させることは本当にできないだろうか．任意の形の軌道の場合はできないが，半径の決まった円軌道ならば，磁場の分布とその時間的な変化を調節することで可能である．それが**ベータトロン**とよばれる粒子加速器の原理で，上のような電磁誘導の本質を正しく理解したノルウェー生まれのアーヘン大学の学生ヴィデレー (R. Wideröe，1902 ～) が21歳の時に発見したものである．

ベータトロン

磁場の変化で発生する誘導電場を利用して，真空中の電子を図9.6のように半径 R の円軌道上で加速することを考えよう．電子を速さ $v=0$ から加速するわけであるが，速さ $v(t)$ まで加速された状態から，同じ軌道上に保ちながらさらに加速するための条件を求めればよい．

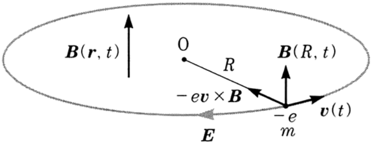


図 9.6

速さ $v(t)$ の電子が半径 R の円運動をするためには，軌道の位置に，軌道面に垂直に磁場がかかっていなければならない．その磁束密度の大きさ $B(R, t)$ は，電子(質量 m, 電荷 $-e$)が磁場から受けるローレンツ力が円運動の向心力になる条件から，

$$\frac{mv^2(t)}{R} = ev(t)B(R, t) \tag{9.11}$$

である．ただし，このままでは一定速度で回転するだけなので，さらに加速するためには，軌道に沿って誘導電場が発生していなければならない．しかしそれによって速度 $v(t)$ が増すと，(9.11)の左辺は $v^2(t)$，右辺は $v(t)$ に比例するので，バランスがくずれる．この問題を解決しなければならない．

誘導電場に関する方程式は積分の方程式(9.5)だから，これだけでは誘導電場の関数形は決まらない．実際に発生する誘導電場 $\boldsymbol{E}$ が軌道に沿った円形になっているためには，磁場を発生する装置が完全に軸対称に作られていなければならない．もしそのような誘導電場ができたとすると，半径 R の点にある電子はそれによって

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -eE(R, t) \tag{9.12}$$

のように加速される．一方，(9.11) の両辺を $v(t)$ で除してから t で微分すると，

$$m\frac{dv(t)}{dt} = eR\frac{dB(R, t)}{dt} \tag{9.13}$$

だから，$E(R, t)$ と $B(R, t)$ の間には

$$E(R, t) = -R\frac{dB(R, t)}{dt} \tag{9.14}$$

の関係がなければならない．ところが，軌道上の $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ は，軌道を縁とする面を貫く磁束 Φ との間に (9.4) の関係があるから，場が軸対称になっていれば，l として半径 R の円を考えると，

$$2\pi RE(R, t) = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{9.15}$$

である．(9.14)，(9.15) より，軌道面の磁場は

$$\frac{dB(R, t)}{dt} = \frac{1}{2\pi R^2}\frac{d\Phi}{dt} \tag{9.16}$$

の関係を満たしていなければならないことがわかる．これを実現するには，常に

$$B(R, t) = \frac{1}{2}\frac{\Phi}{\pi R^2} = \frac{1}{2}\bar{B} \tag{9.17}$$

の関係を保ちながら磁場を増加させていけばよい．$\bar{B}$ は，円軌道内部の平均磁束密度を表す．つまり，軌道の位置の磁束密度 $B(R, t)$ がいつも軌道内部の面の磁束密度の平均の半分になるように装置を設計すれば，ローレンツ力で電子を半径 R の軌道上に保ちながら誘導起電力で加速することができる．これがベータトロンの原

理である．(ただし，(9.17) は必要条件で，このほかに軌道が安定する条件を満たして設計する必要がある．)

§9.4　回路の一部が動く場合

ファラデーが発見したもうひとつの現象，回路の一部が動く場合の電流の発生（§9.1の (2)）は，磁場中で運動する導体の中に，すでにわれわれが知っているローレンツ力に起因する起電力が生じることで説明できる．

簡単のために，図9.7のように，一様な磁場の中を直線的な回路の一部が磁場に垂直な向きに運動する場合を考える．磁場の向きに z 軸をとると

$$\boldsymbol{B} = B\,\boldsymbol{e}_z \qquad (9.18)$$

と書ける．いま，回路の y 軸に平行な長さ a の辺 (1 - 2) が x 方向に速度 $v\,\boldsymbol{e}_x$ で動いているとする．この辺の中の自由に動ける電荷の総数を q とすると，それが受けるローレンツ力は

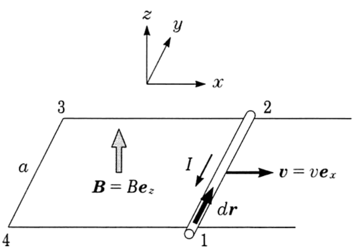


図9.7

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = qvB\,\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_z = -\,qvB\,\boldsymbol{e}_y \qquad (9.19)$$

である．

まず，図9.8のようにこの辺が回路の他の部分につながっていない，単なる直線的な導体棒であった場合を考えておこう．この場合は，正の電荷が $y<0$ の端にたまり，全体は中性だから逆の端には負の電荷がたまる．それらの電荷による y の正の方向を向いたクーロン電場が，短時間のうち

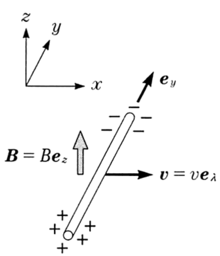


図9.8

にローレンツ力による電荷の移動を抑える大きさになり，電荷の運動は止まる．

この辺が導体回路の他の部分につながっているときは，(9.19) より $q > 0$ なら，電荷は y の負の向きに力を受けて動くのでその向きに電流が流れる．そして回路の静止部分（2 - 3 - 4 - 1）を通ってもとにもどり，電流として流れ続ける．もし $q < 0$ なら，電荷は y の正の向きに力を受けて動くが，それを電流としてみたときはやはり y の負の向きに流れていることになる．

このときの起電力は，$d\boldsymbol{r}$ の向きを $\boldsymbol{B}$ の方向に進む右ネジを回す向きにとって計算すると

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q}\oint_l \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{q}\int_1^2 (-\,qvB\,\boldsymbol{e}_y)\cdot(\boldsymbol{e}_y\,dy) = -\,vB\int_1^2 dy = -\,vBa \tag{9.20}$$

となる．負号は (9.19) に由来し，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{v}$ の向きが図 9.7 に示す関係にある場合，$\mathcal{E}$ の向きが $d\boldsymbol{r}$ の向きと逆であることを表す．

ところでこの場合も，回路の一部が移動する（回路が変形する）結果，回路を貫く磁束（Φ）が変化している．その変化の速さと $\mathcal{E}$ の関係を求めてみよう．回路（1 - 2 - 3 - 4）を外周とする長方形の面を S とし，その面積を A とすると，

$$\Phi = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{S}} B\,\boldsymbol{e}_z\cdot dS\,\boldsymbol{e}_z = \int_{\mathrm{S}} B\,dS = BA \tag{9.21}$$

より

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = B\frac{dA}{dt} = Bav = -\,\mathcal{E} \tag{9.22}$$

である．ここで $\boldsymbol{B}$ は一定であるとして計算したが，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が一定でなく場所に依存するときも，この関係が成り立つことを示すことができる．つまり，面白いことに，回路を貫く磁束の変化と起電力の関係は，向きも含めて(9.3)の場合と全く同じである．このためこの現象も広い意味では電磁誘導とよび，(9.20) も誘導起電力とよぶことがある．

もちろん，回路の一部が動いたときに起電力が生じるためには，動いている部分の空間に磁束密度が存在していなければならない．磁束密度が 0 であるような領域で回路の一部が動いても起電力は生じないので，当然電流は流れない．これに対して，§9.2 で学んだ狭い意味での電磁誘導では，回路の位置の磁束密度はいたるところ 0 であっても，その回路を外周とする曲面を貫く磁束が変化しさえすれば，周りの空間全体に誘導電場が発生し，回路に電流が流れる．このことからも，これら二つの現象が異なる現象であることがわかる．(注：　特殊相対論のローレンツ変換によって別の慣性系から観測した場合も，その系であらためてこの 2 つの現象を区別することになる．)

§9.5　レンツの法則

§9.1 の (3)，(4) を**レンツの法則**という．上で行った定式化はこれを正しく表現していることを確かめよう．

まず (3) であるが，これは，電磁誘導の法則を (9.3)，(9.5) に負号をつけて表したことで表現されている．l が抵抗 R をもつ実際の回路であれば，誘導電流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} \tag{9.23}$$

が流れる．図 9.9 の回路 l を貫く磁束の変化が $d\Phi/dt > 0$ であるとすると，$\mathcal{E}$，I は図の矢印の向きに生じている．よって，誘導起電力によって生じた I によって新たに磁場 $\boldsymbol{B}'$ が生じるはずであるが，その向きは確かにもとの磁束の変化 $d\Phi/dt$ を妨げる向きである．

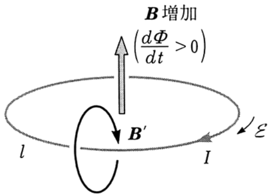


図 9.9

つぎに，回路の一部が動いている場合を考える．簡単のために，図 9.7 のように直線部分 (1-2) が動いているとす

る．誘導起電力は(9.20)で与えられるから，回路全体の抵抗を R とすると，誘導電流は

$$I = -\frac{vBa}{R} \tag{9.24}$$

である．よって，直線部分（1-2）が受けるローレンツ力は

$$\boldsymbol{F} = \int_1^2 d\boldsymbol{F} = \int_1^2 -\frac{vBa}{R}\, d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} = -\frac{vBa}{R}\int_1^2 \boldsymbol{e}_y\, dl \times B\, \boldsymbol{e}_z \tag{9.25}$$

$$= -\frac{vB^2a^2}{R}\boldsymbol{e}_x = -\frac{B^2a^2}{R}\boldsymbol{v} \tag{9.26}$$

である．これは，確かに $\boldsymbol{v}$ と逆向き，すなわち，回路の動きを妨げる向きの力である．回路を貫く磁束の総量の，回路の動きによって生じる変化 $d\Phi/dt$ を，妨げる向きであるといってもよい．

電磁ブレーキ

§9.3で，平面導体が存在する領域の磁場が変化すると渦電流が流れることを学んだが，磁場の中を平面導体が動く場合にも渦電流が流れる．この場合もレンツの法則は成り立ち，渦電流は導体の運動を妨げるように流れるので，導体には強いブレーキがかかる．この効果を利用したものが，電車などで使われている**電磁ブレーキ**である．

なお，渦電流によるブレーキが効率的にはたらくためには，一様な磁場が存在する領域より導体板の面積が大きくなければならない．面積が小さく，一様な磁場中に全体が含まれると，誘導起電力が面内に一様に同じ向きに生じて，互いに打ち消し合い，電流があまり流れないからである．一方，導体の一部だけが磁場中にあればその部分にのみ誘導起電力が発生して，他の部分を通ってもどる電流が十分に流れるので，抵抗力も大きくなる．また，導体板の電気抵抗が大きいほど抵抗力は小さく，これは，誘導起電力は物質によらず発生するが，抵抗が大きいと渦電流が小さくなることで説明できる．

§ 9.6 相互インダクタンス

§ 9.3 では，磁場の変化が与えられたとして回路に生じる誘導起電力を考えたが，ここではその磁場の原因となる電流と誘導起電力との関係を考える．いま，図 9.10 のように，2 つの回路 l_1，l_2 が近接してあるとする．l_1 に電流 I_1 が流れたとき空間に磁束密度の場ができるが，そのうち l_2 を貫く磁束 Φ_{21} は I_1 に比例するので

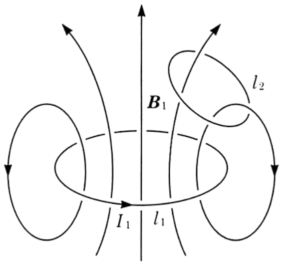


図 9.10

$$\Phi_{21}(t) = M_{21} I_1(t) \tag{9.27}$$

と書ける．したがって，I_1 が変化すると l_2 に誘導起電力

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt} \tag{9.28}$$

が生じる．この現象を**相互誘導**という．同様に，l_2 を流れる電流が変化したときに l_1 に誘導起電力

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt} \tag{9.29}$$

が生じる．一般に M_{21} と M_{12} は等しいことが証明できるので，

$$M = M_{21} = M_{12} \tag{9.30}$$

と置く．M を**相互インダクタンス**という．M の大きさは l_1 と l_2 の配置，すなわち，相互の距離や向きによって異なる．M は正にも負にもなるが，その符号は I_1，I_2 の正の向きをどうとるかによって変るので，あらかじめ指定して（任意でよい）はっきりさせる必要がある．それに合わせて，$\mathcal{E}_1$，$\mathcal{E}_2$ の正の向きはそれぞれ I_1，I_2 と同じ，また Φ_1，Φ_2 の正の向きは，それぞれ I_1，I_2 の正の向きに右ネジを回したときに進む向きにとる．もちろん，I_1 をある向

きに増加させたときに I_2 に生じる誘導起電力の向きは電磁誘導の法則から決まっている．それを (9.28) で表すときに I や Φ の正の向きを指定しておき，最後に電磁誘導の法則に合わせて M の正負が決まる．逆に M が正になるように，I_1，I_2 の正の向きの関係をあらかじめ慎重に決めることもある．

M の次元と SI 単位は (9.27)，(9.28) より

$$[M] = [\Phi][I]^{-1} = [\mathcal{E}]T[I]^{-1}:$$

$$\mathrm{Wb/A = V\cdot s/A = \Omega\cdot s = H = henry}\ (\textbf{ヘンリー}) \tag{9.31}$$

である．

例題 9.2

図 9.11 のように，半径 a_1 で N_1 巻きの円形コイルと半径 a_2 で N_2 巻きの円形コイルを，中心を一致させて同じ平面上に置いた場合について，

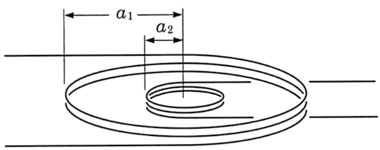


図 9.11

$a_2 \ll a_1$ のときの相互インダクタンス M を求めなさい．

［**解**］ 円形回路の周りの磁束密度は中心軸上については解析的にわかる．半径 a_1 の回路に電流 I_1 を流したときの中心の磁束密度は，［例題 8.3］より，

$$B_1(0) = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2a_1} \tag{9.32}$$

である．$a_2 \ll a_1$ だから，半径 a_2 の円形回路の面内で磁束密度が一様であると近似すると，それを貫く磁束は

$$\Phi = \pi a_2{}^2 B_1(0) = \frac{\mu_0 I_1 N_1 \pi a_2{}^2}{2a_1} \tag{9.33}$$

である．半径 a_2 のコイルはこの磁束を N_2 回巻いているから，

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi a_2{}^2}{2a_1} \tag{9.34}$$

である．ただし，両コイルの電流の正の向きは同じ向きとして M の符号を決めた．

§9.7 自己インダクタンス

空間に1個しか存在しない回路の周りにも図9.12のように磁場ができ，必ず磁束がその回路を貫く．生じる磁束密度は電流 $I(t)$ に比例するから，貫く磁束も $I(t)$ に比例する．

$$\Phi(t) = LI(t) \qquad (9.35)$$

この比例定数 L を**自己インダクタンス**という．L は回路の形や大きさに依存する．最初に流す電流の正の向きを決め，磁束の正の向きを電流の正の向きに回した右ネジが進む向きにとれば，常に $L > 0$ である．

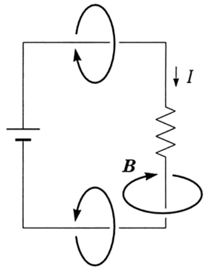


図9.12

回路のスイッチを入れた瞬間や，回路に交流電圧源（時間的に変化する起電力をもつ電源）をつないだ場合には，電流 $I(t)$ が変化するから，回路を貫く磁束 $\Phi(t)$ も変化し，回路に誘導起電力

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI(t)}{dt} \qquad (9.36)$$

が生じる．この現象を**自己誘導**という．この誘導起電力は，電流の変化を妨げる向きに生じるので，**逆起電力**ともよばれる．自己インダクタンス L は電流と逆起電力の関係を表す量であるから，回路が同じ磁束を N 回巻いているときは，(9.7) より N 倍になる．（さらに磁束 Φ 自体も N に関係するから，結局 L の表式に N^2 が現れることになる．）L は回路の形や大きさによって決まる．図9.12のような1重のループの自己インダクタンスは小さく，何重にも巻いたコイルではじめて重要になる．

(9.36)，(9.35) から，L の次元とSI単位は M と同じで

$$[L] = [\Phi][I]^{-1} = [\mathcal{E}]T[I]^{-1}: \quad \mathrm{Wb/A = V{\cdot}s/A = \Omega{\cdot}s = H} \qquad (9.37)$$

である．これから，1 H の自己インダクタンスは，1 秒当り 1 A の割合の電流の変化があるときに 1 V の逆起電力を生じるような L の大きさである．

例題 9.3

長さ l，断面積 A で，総巻き数 N の長いソレノイドの自己インダクタンスを求めなさい．

［**解**］ このソレノイドに電流 I を流すと，内部に一様な大きさ

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} \tag{9.38}$$

の磁場を生じるから，回路を貫く磁束は

$$\Phi = AB = \frac{\mu_0 NIA}{l} \tag{9.39}$$

である．回路（ソレノイド自身）はこの磁束を N 回巻いているから，

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 AI}{lI} = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \tag{9.40}$$

である．

§9.8　変位電流密度

ファラデーは，磁場が変動すると誘導電場が生じることを発見した．それでは，電場が変動すると磁場が生じるのではないだろうか．きっとそうに違いないことをマクスウェルは実験によってではなく電磁場の方程式を完結させるために要請した．そして，それを要請した方程式と彼がまとめた他の方程式から**波動方程式**が導かれることを示した．このことは，電磁気の波，すなわち**電磁波**が存在することを予言したことになる．この要請が正しかったことは，20 余年後にヘルツが，電気振動が確かに波として空間を伝わることを実験によって示したことにより，証明された．また，マクスウェルの波動方程式は光の速さと同じ速さの波を表していた．これは，光も電磁波であるらしいことを示す．その後，この方程式が光のさまざまな性質を説明することが明らかになり，光も電磁波の一種であることが確定した．

マクスウェルが，変動する電場が磁場を生じることを要請したときの推論を理解するために，図9.13のような平行板コンデンサーが充電している状況を考える．帯電していないコンデンサーに起電力 $\mathcal{E}$ の電源と抵抗をつなぐ．スイッチを閉じると電流が流れ始めるが，その時間依存性は§10.2で学ぶように

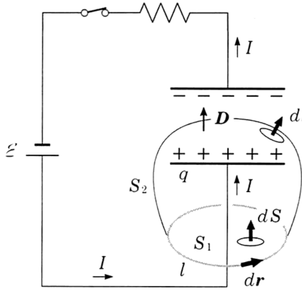


図9.13

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \tag{9.41}$$

である．これは時間の関数で，$e^{-t/RC}$ にしたがって弱くなっていくが，いまはその関数形は問題ではない．この電流が流れている間だけを考えると，導線の周りには電流に比例した磁場ができる．その磁場の強さ $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の，図の閉曲線 l に沿っての循環は，(8.40) によれば各瞬間に

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{9.42}$$

を満たす．S は l を外周とする曲面である．$d\boldsymbol{S}$ の向きは，これまで通り，$d\boldsymbol{r}$ の向きに回した右ネジが進む向きである．S として図に示すような S_1 を考えると，

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{r} = I(t) \tag{9.43}$$

である．ところで，左辺の循環は l に沿っての積分だから，S に無関係である．したがって，S がどのような面であっても成り立たなければならないのであるが，図の S_2 の上で (9.42) の右辺の積分を行うと，コンデンサーの極板の間には電流は流れていないから 0 である．左辺は同じなのに，右辺が S をどう選ぶかで (9.43) と異なってしまう．この矛盾を解決するためにマクスウ

ェルは，変位電流密度あるいは電束電流密度という概念を導入した．

コンデンサーに電流が流れ込んでいるときには，極板の電荷 q が増加しつつあり，したがって極板間の電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)$ と電場の強さ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ が増加している．いま，閉曲面 $\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2$ についてガウスの法則を適用すると

$$\oint_{\bar{\mathrm{S}}_1+\mathrm{S}_2} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{S} = q(t) \tag{9.44}$$

である．ただし，ガウスの法則を考えるときは $d\boldsymbol{S}$ は閉曲面の外向きの面素ベクトルだから，S_1 の部分では向きが図とは逆になる．それを $\bar{\mathrm{S}}_1$ で表した．ところが $\boldsymbol{D}$ は S_1 には存在しないから，S_1 上の積分は実は無視してよい．よって

$$\int_{\mathrm{S}_2} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{S} = q(t) \tag{9.45}$$

である．この両辺を時間で微分すると

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}_2} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{dq}{dt} \tag{9.46}$$

となる．しかるに，右辺は電極に蓄えられる電荷の時間変化だから，これは流れ込む電流を表し，

$$\frac{dq}{dt} = I(t) \tag{9.47}$$

である．よって

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}_2} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{S} = I(t) \qquad \text{あるいは} \qquad \int_{\mathrm{S}_2} \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} = I(t) \tag{9.48}$$

である．左辺を**変位電流**という．左の式の左辺は S_2 上で積分したあとでの時間に関する微分だから常微分であるが，右の式の左辺は時間と空間の関数 $D(\boldsymbol{r}, t)$ を時間でのみ微分したあとに S_2 上で積分するので，微分は偏微分である．このようにこれらの式の左辺の積分が（9.43）と同じ電流を与えることを利用すれば，(9.42)の右辺の面積分を S_2 上で行っても成り立つように変更することができる．それには，（9.42）を

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{9.49}$$

とすればよい．この式は，変動する電場も電流と同じように磁場の原因になることを示している．ここに導入された電束密度の時間変化率の場

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}$$

を**変位電流密度**（あるいは**電束電流密度**）の場という．(9.49) は第3の**マクスウェル方程式**の完成した形(積分形)であり，これで(3.35)，(8.91)，(9.5)を合わせて4個の方程式が完全な形でそろったことになる．

演 習 問 題

[1] 式 (9.5) の両辺の次元が等しいことを確認しなさい．

[2] 半径1 cm, 長さ20 cm, 総巻き数1000回のソレノイドコイルの自己インダクタンスを求めなさい．

[3] 上問のソレノイドコイルの中央付近に半径1.5 cm, 長さ3 cm, 総巻き数100回のソレノイドコイルをはめた．

(a) これらのコイルの相互インダクタンスを求めなさい．

(b) 内側のコイルにピーク値1 A，50 Hz の交流を流した．外側のコイルに10 Ω の抵抗がつながれているとすると，この抵抗にはどのような電流が流れるか．

[4] 辺の長さが5 cm，10 cm の長方形の回路が，直線電流と同一平面上にある．この回路を，長さ10 cm の辺を直線電流と平行に保ちながら，速度1 cm/s で直線から遠ざける．直線電流は1 A で，この回路の全抵抗を10 Ω とする．電流に近い側の辺が電流から1 cm 離れた点を通過しているときに回路を流れる電流を求めなさい．

[5] 半径5 cm，総巻き数100の円形コイルをいろいろな向きでひとつの直径の周りに回転させたところ，起電力が生じたが，その大きさは向きによって変化し

た．これは地磁気の効果であるが，地磁気に対して回転の軸をどのように置いたときに最大の起電力が得られるか．地磁気を 3×10^{-5} T とし，回転を 1 秒に 50 回転とするとき，最大の起電力を求めなさい．

［**6**］ 図 9.14 のように，一様な磁場に垂直に平行な 2 本の導線がありその端に抵抗 R がつながれている．この導線に垂直に導体棒を接触させ，速さ v で抵抗から遠ざける．回路を流れる電流と抵抗で消費される電力，および棒を動かす力が単位時間にする仕事を求めなさい．

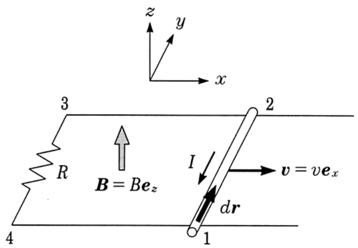


図 9.14

［**7**］ 極板の面積 A，間隔 d の平行板コンデンサーが図 9.15 のような回路につながれている．はじめ極板は帯電していなかったとして，スイッチ投入後の極板間の変位電流密度と変位電流を時間の関数として求めなさい．

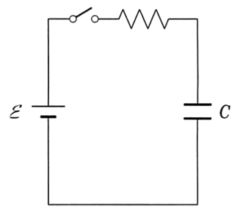


図 9.15

10 過渡現象と交流回路

電気回路は，家庭電化製品をはじめとして，さまざま装置の中で使われている．その基本は，抵抗，コンデンサー，コイル等の受動素子（増幅などをしない素子）と，トランジスタ等の能動素子（増幅作用などをもつ素子）を組み合わせた回路である．最近では，これらをひとつの半導体素子の中に組み込んだ集積回路（IC）が主流になっている．ここでは，代表的な受動素子の性質を調べよう．

§10.1　基本素子の性質

素子の両端の電位差と流れる電流の関係が，比例関係，あるいは時間に関する微分または積分で表される受動素子を線形素子という．代表的な線形素子は，抵抗，コンデンサー，コイルである．理想的な（直流）電源，導線，線形素子は以下のような性質をもっている．

理想的な定電圧源：　とり出す電流の大きさにかかわらず両端の電位差（端子電圧）を常に一定（起電力の値）に保つことができる電源（記号は図 5.16）

理想的な定電流源：　抵抗などの負荷の大小に応じて端子電圧の大きさが自由に変って一定の電流を送り出すことのできる電源（記号は図 10.1(a)）

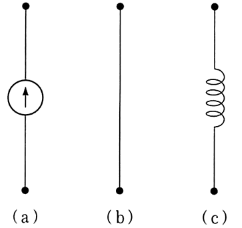


図 10.1

理想的な導線：　電流の大きさにかかわらず両端の電位差が生じない，すなわち 抵抗のない導線（記号は図 10.1(b)）

理想的な抵抗：　両端の電位差 V と流れる電流 I の間に，オームの法則

$$V = IR \tag{10.1}$$

が成り立つ素子（記号は図 6.7）

理想的なコンデンサー：　両端の電位差 V の変化と流れ込む電流 I の間に，(5.44) を時間で微分した，静電容量 C を比例定数とする関係

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dV(t)}{dt} \tag{10.2}$$

が成り立つ素子（記号は図 5.14）

理想的なコイル：　流れ込む電流 I の変化とそれによって起きる逆起電力 $\mathcal{E}_L$ と間に，自己インダクタンス L を比例定数とする関係

$$\mathcal{E}_L(t) = -L\frac{dI(t)}{dt} \tag{10.3}$$

が成り立つ素子（図 10.1(c)）

現実の電源や回路素子の主要な性質は理想的な素子を用いて表現できる．以下では，原則として電源や導線や素子を理想的なものとして扱う．

先に進む前に，これらの理想的な素子を用いた以下のような回路は，接続の瞬間に矛盾を生じることに注意する．

（1）　図 10.2 のように，理想的な定電圧源の両端子に理想的な導線 (a)，あるいは理想的なコンデンサー (b) をつなぐ．

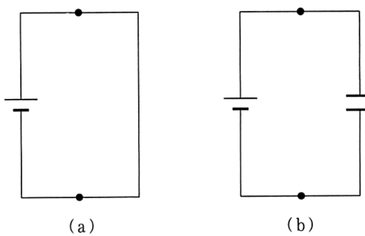


図 10.2

（2） 図10.3のように，理想的な定電流源の端子に何もつながない (a)，あるいは理想的なコイル (b) をつなぐ．

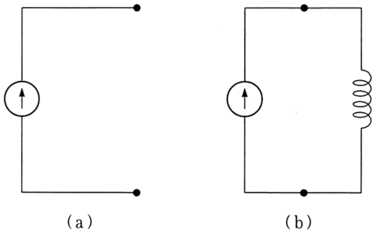


図10.3

例題 10.1

上の (1)，(2) が矛盾を含むという意味を述べなさい．

［解］（1） (a) 理想的な定電圧源は両端子に何をつないでも端子電圧が変らないはずであるが，理想的な導線は何をつないでもその両端の電位を等しく（電位差を0に）する素子だから．

(b) コンデンサーはその端子間の電圧がそのとき蓄えられている電荷の量で決まるので，その電圧と異なる起電力の電源をつなぐと，瞬時に無限大の電流が流れて必要な電荷が供給されなければならないから．

（2） (a) 理想的な定電流源は，何をつないでも決まった大きさの電流を流せるはずであるが，何もつながなければ抵抗が無限大で電流が流せないから．

(b) 理想的なコイルに理想的な電源をつないで，決まった電流を急に流そうとすると，コイルの端子に無限大の逆起電力が生じるから．

§10.2 過 渡 現 象

現実的な回路では，前節の最後に述べたような配線をすると，事故につながることもあれば，一見問題なく回路がはたらく場合もある．後者の場合は，電源の内部抵抗や導線がもっている抵抗が矛盾を緩和するはたらきをしてい

る．

ここでは，抵抗を直列に含む回路について，その性質を学ぶ．そのような回路に直流電源をつないだとき，直ちに定常的な状態になるのではなく，スイッチを入れた直後から定常状態に向かって連続的な変化が起こる．これを**過渡現象**という．定常状態になるまでの時間は，つながれている回路素子の電気抵抗や静電容量などの値で決まる**時定数**によって異なる．

RC 回路

図 10.4 のように，起電力 $\mathcal{E}$ の定電圧電源に抵抗値 R の抵抗と容量 C のコンデンサーを直列につなぐ．時刻 $t=0$ にスイッチ S を閉じると，電流が流れてコンデンサーが充電される．電流 $I(t)$ は単位時間当りの電荷の流れだから，コンデンサーに蓄えられる電荷 $q(t)$ との関係は

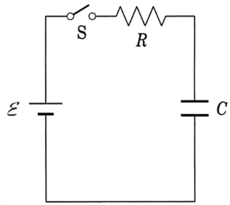


図 10.4

$$I(t)=\frac{dq(t)}{dt} \tag{10.4}$$

である．また，各素子は理想的導線でつながれているとすると，抵抗の両端の電位差とコンデンサーの両端の電位差を加えたものが電源の起電力に等しいから

$$R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=\mathcal{E} \tag{10.5}$$

が成り立つ．これは q についての定係数の**非同次線形(常)微分方程式**であるから，標準的な解法で解くことができる．つまり，同次微分方程式

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0 \tag{10.6}$$

の一般解と (10.5) の特解の和が (10.5) の**一般解**((10.6) が 1 階の微分方程式の場合には，1 個の**任意定数**を含む解)である．それを求めるために，定係数の**同次線形(常)微分方程式**の一般的な解法にしたがって，

$$q(t) = e^{\lambda t} \tag{10.7}$$

とおいて代入すれば，

$$\frac{de^{\lambda t}}{dt} = \lambda e^{\lambda t} \tag{10.8}$$

を考慮して

$$\lambda R\, e^{\lambda t} + \frac{1}{C} e^{\lambda t} = 0 \tag{10.9}$$

となる．両辺を $e^{\lambda t}$ で除すると

$$\lambda R + \frac{1}{C} = 0 \tag{10.10}$$

となるから，

$$\lambda = -\frac{1}{RC} \tag{10.11}$$

である．よって，(10.6) の一般解は

$$q(t) = A\, e^{-t/RC} \tag{10.12}$$

であることがわかる．A は任意の定数である．次に (10.5) の**特解**を求める．特解とは，その方程式の解になっている特定の関数という意味である．どんな解でもよい．これは普通，視察によって求めることができる．いまの場合は明らかに

$$q = C\mathcal{E} \qquad \text{(定数)} \tag{10.13}$$

が特解のひとつである．よって，(10.5) の一般解は (10.12) と (10.13) の和

$$q(t) = Ae^{-t/RC} + C\mathcal{E} \tag{10.14}$$

であることがわかる．これが実際に (10.5) の解であることは代入して確かめることができる．

これに初期条件を入れれば A が決まり，解が求まることになる．はじめにコンデンサーは帯電していなかったとすると，$t = 0$ のとき $q(0) = 0$ だから，

$$q(0) = A + C\mathcal{E} = 0 \qquad \text{より} \qquad A = -C\mathcal{E} \tag{10.15}$$

である．よって結局，求める解は

$$q(t) = -C\mathcal{E}e^{-t/RC} + C\mathcal{E} = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) \qquad (10.16)$$

となる．コンデンサーの極板の電荷がこのように変化するのだから，その両端の電位差は

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) \qquad (10.17)$$

のように変化する．また，当然電流は

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} \qquad (10.18)$$

のように変化する．

これらの変化の様子を図 10.5 に示す．変化の速さは

$$\tau = RC \qquad (10.19)$$

で決まる．これを RC 回路の**時定数**という．τ の次元と SI 単位は

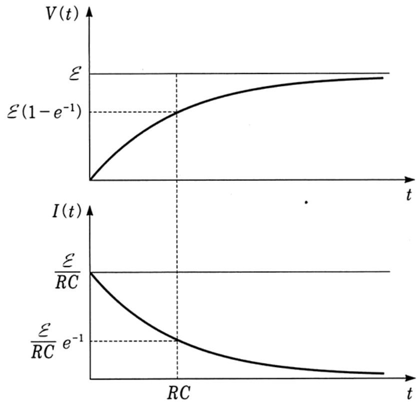


図 10.5

$$[\tau] = [R][C] = [V][I]^{-1}Q[V]^{-1} = TQ^{-1}Q = T : \quad \mathrm{s} \qquad (10.20)$$

である．

コンデンサーを通して直流が流れることはできないのであるが，以上のように，スイッチを入れた直後の短い時間の間だけは電流が流れ，それによっ

てコンデンサーの電極に蓄えられる電荷が送られる.

例題 10.2

図 10.6 のような回路において, $\mathcal{E}=10\,\mathrm{V}$, $C=1\,\mu\mathrm{F}$, $R=1\,\mathrm{k\Omega}$ とする. 時刻 $t=0$ にスイッチ S を閉じた後の抵抗の両端の電位差の変化を求め図示しなさい.

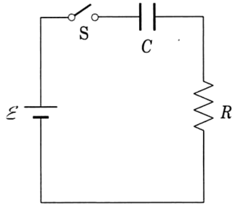


図 10.6

[**解**]　回路は本質的に図 10.4 と同じだから, 方程式 (10.5) が成り立ち, 同様に解くと, 電流は (10.18) で与えられる. よって, 抵抗の両端の電圧は

$$V(t)=RI(t)=\mathcal{E}\,e^{-t/RC} \tag{10.21}$$

のように変化する. $RC=10^{-3}\,\mathrm{s}$ だから, 変化の様子は図 10.7 のようになる.

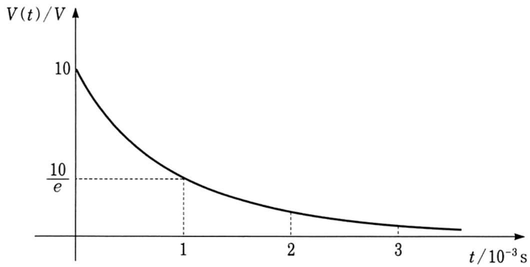


図 10.7

RL 回 路

次に，図 10.8 のように，起電力 $\mathcal{E}$ の定電圧電源に抵抗値 R の抵抗と自己インダクタンス L のコイルを直列につないだ回路の性質を調べよう．時刻 $t=0$ にスイッチ S を閉じると，電流が流れ始める．コイルの性質は，電流の変化を妨げるように逆起電力 (10.3) が生じることである．各素子は理想的導線でつながっているとすると，抵抗の両端の電位差とコイルの両端の逆起電力を加えたものは電源の起電力に等しいはずだから

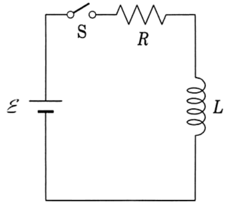


図 10.8

$$L\frac{dI(t)}{dt}+RI=\mathcal{E} \tag{10.22}$$

が成り立つ．逆起電力の向きを考えて，左辺には $\mathcal{E}_L=-L\,dI/dt$ ではなく $-\mathcal{E}_L$ が入っていることに注意する．

これは I についての定係数の非同次線形(常)微分方程式なので，(10.5) と全く同様に解くことができる．まず，同次微分方程式

$$L\frac{dI(t)}{dt}+RI=0 \tag{10.23}$$

の一般解は，

$$I(t)=A\,e^{-(R/L)t} \tag{10.24}$$

である．また，

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R} \tag{10.25}$$

が (10.22) の特解のひとつである．よって，(10.22) の一般解は

$$I(t)=A\,e^{-(R/L)t}+\frac{\mathcal{E}}{R} \tag{10.26}$$

である．

初期条件は $t = 0$ のとき $I(0) = 0$ であるから，

$$A + \frac{\mathcal{E}}{R} = 0 \qquad \text{より} \qquad A = -\frac{\mathcal{E}}{R} \tag{10.27}$$

で，結局 求める解は

$$I(t) = -\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-(R/L)t} + \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \tag{10.28}$$

となる．RC 回路とは異なり，電流は 0 から次第に増加する．その様子を図 10.9 に示す．増加の速さは

$$\tau = \frac{L}{R} \tag{10.29}$$

で決まる．これを RL 回路の時定数という．最終的に流れる電流は $I = \mathcal{E}/R$ となるからコイルは直流に対しては単なる導線と同じはたらきをするのであるが，スイッチを入れた直後の短い時間の間は，逆起電力が電流の増加を妨げるために，電流は瞬時に $\mathcal{E}/R$ になることができないのである．

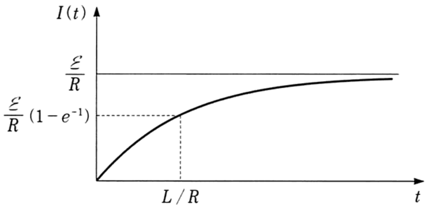


図 10.9

LCR 回路

次に，図 10.10 のように，起電力 $\mathcal{E}$ の定電圧電源に抵抗値 R の抵抗と容量 C のコンデンサーと自己インダクタンス L のコイルを直列につないだ回路の性質を調べよう．時刻 $t = 0$ にスイッチ S を閉じると，電流が流れ始める．各素子は理想的導線でつながっているとすると，

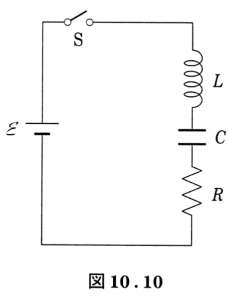


図 10.10

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E} \tag{10.30}$$

が成り立つ．電流 I とコンデンサーの電極の電荷 q の間にある（10.4）の関係を利用するために，両辺を t で微分すると，

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} = 0 \tag{10.31}$$

が得られる．これは，2 階の定係数の同次微分方程式だから，2 個の任意定数を含む解が一般解である．この場合も標準的な解法にしたがって

$$I(t) = e^{\lambda t} \tag{10.32}$$

とおいて代入すると

$$L\lambda^2 e^{\lambda t} + R\lambda e^{\lambda t} + \frac{1}{C}e^{\lambda t} = 0 \tag{10.33}$$

だから，$e^{\lambda t}$ で除すると

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \tag{10.34}$$

となる．これは λ についての 2 次方程式であるから，解は，R，L，C の値によって実根，重根，複素根の場合がある．根の判別式を

$$D = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} \tag{10.35}$$

とすると，

$$\lambda_{\pm} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{D}}{2} \tag{10.36}$$

が得られる．

i）　$D > 0$ のとき，$\lambda_{\pm}$ は負の 2 実根で，(10.31)の一般解は，A，B を任意の定数として

$$I(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \tag{10.37}$$

である．これは，図 10.11 の（a）のような，次第に減衰する解を表す．

ii）　$D < 0$ のとき，$\lambda_{\pm}$ は複素根

$$\lambda_{\pm} = \frac{-R}{2L} \pm i\frac{\sqrt{|D|}}{2} \tag{10.38}$$

で，(10.31) の一般解は, A, B を任意の定数としてやはり (10.37) で表されるが, (10.38) を代入すると

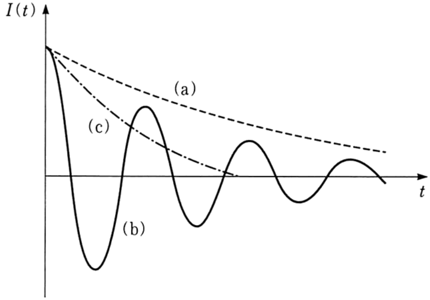


図 10.11

$$I(t) = e^{-(R/2L)t}(A\,e^{+i\sqrt{|D|}\,t} + B\,e^{-i\sqrt{|D|}\,t}) \tag{10.39}$$

と書ける．これは，図 10.11 の (b) のような振動をしながら次第に減衰する解を表す.

iii) $D = 0$ のとき，$\lambda_{\pm} = \lambda_0 = -R/2L$ は重根である．この場合(10.37) は

$$I(t) = (A + B)\,e^{\lambda_0 t}$$

となって任意定数は実質的に $A + B$ だけ (1 個) だから (10.31) の一般解を表さない．そこで

$$I(t) = C(t)\,e^{\lambda_0 t} \tag{10.40}$$

とおいて，(10.30) に代入して一般解を探すと，A，B を任意の定数として

$$I(t) = (At + B)\,e^{-(R/2L)t} \tag{10.41}$$

が得られる．これは，図 10.11 の (c) のような最も速く減衰する解で，**臨界減衰**の解とよばれる.

具体的な解は, 初期条件を与えて定数 A と B を決めれば得られるが, ここでは省略する. 図 10.7 は解のおおよその様子を示したものである. いずれの場合も，しばらく後には，コンデンサーの充電が完了して電流は流れなくな

る．

§10.3　複素数とガウス平面

前節でも**複素数**を扱ったが，次節の交流回路の解析では，さらに積極的に複素数を利用する．そこでまず，複素数，特にその極形式について学んでおく．x，y を実数とするとき，

$$z = x + iy, \qquad i^2 = -1 \tag{10.42}$$

を**複素数**といい，x をその**実数部**または**実部**(Re z と記す)，y を**虚数部**または**虚部**（Im z と記す）という．i を**虚数単位**という．また，

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{10.43}$$

を z の**絶対値**という．z に含まれる虚数単位 i を $-i$ に変えた

$$z^* = x - iy \tag{10.44}$$

を z の**複素共役**という．z^* を用いると，

$$|z| = \sqrt{zz^*}, \qquad \mathrm{Re}\, z = \frac{z + z^*}{2}, \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - z^*}{2i} \tag{10.45}$$

である．図 10.12 のように，$x + iy$ をデカルト座標の点（x, y）に対応づけることができる．これを**ガウス平面**という．複素数はまた，別の実数の組(r, θ)を用いて，**複素指数関数**

$$z = r\, e^{i\theta} \tag{10.46}$$

で表すこともできる．これを複素数 z の**極形式**という．$x + iy$ と（r, θ）の間には

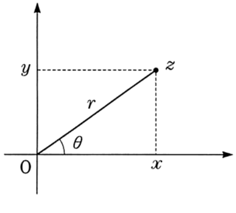


図 10.12

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad \left(\tan\theta = \frac{y}{x}\right) \tag{10.47}$$

なる関係がある．よって，これは $x + iy$ を表す点の 2 次元極座標表示に対応

している．

$$|z| = \sqrt{r\,e^{i\theta}z \times r\,e^{-i\theta}} = r \qquad (10.48)$$

だから，r は z の絶対値である．θ を z の**偏角**という．

例題 10.3

（1）複素数 $z = 1 + i$ を極形式で表しなさい．

（2）$z = 2e^{i\pi/2}$ を $x + iy$ の形で表しなさい．（図 10.13）

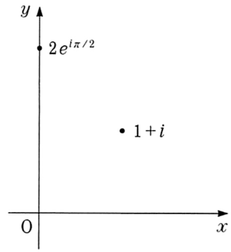


図 10.13

［解］（1）$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,　$\cos\theta = \sin\theta = 1/\sqrt{2}$　より　$\theta = \pi/4$ だから　$z = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$

（2）$\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$,　$\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$　だから　$z = 2i$

§10.4　交流回路

図 10.14 のように三角関数的に変動する電圧，電流をそれぞれ**交流電圧**，**交流電流**，または単に**交流**という．抵抗，コンデンサー，コイルなどを含む回路に**交流電圧源**をつないだとき，これを**交流回路**という．交流電圧源は図 10.15 のような回路記号で表す．回路の性質は，(10.5)，(10.22)，(10.30) 等の右辺の $\mathcal{E}$ を交流的に変動する起電力

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos\omega t \qquad (10.49)$$

に置き換えれば記述できる．ω を**角振動数**（または**角周波数**）という．$f =$

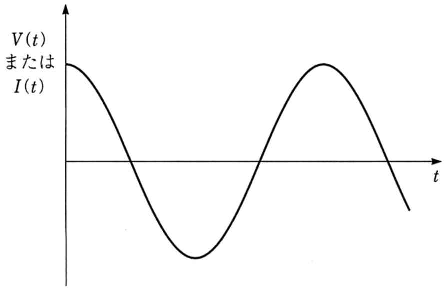


図 10.14



図 10.15

$\omega/2\pi$ を**振動数**(または**周波数**)，$T = 1/f = 2\pi/\omega$ を**周期**という．それぞれの次元と SI 単位は

$$[\omega] = T^{-1}: \quad \text{rad/s}, \qquad [f] = T^{-1}: \quad \text{Hz} = \text{hertz}\ (\textbf{ヘルツ}), \qquad [T] = T: \quad \text{s} \tag{10.50}$$

である．角度 ωt を**位相**という．

解法は§10.3 と同じ方針でよい．同次方程式の一般解は全く同じで，ただ，非同次方程式の特解が異なるだけである．面白いことに，§10.3 で学んだように同次方程式の一般解 (10.12)，(10.24)，(10.37)，(10.39)，(10.41) はすべて時間とともに減衰してしまう．つまり，それらは，最初の短い時間の変動を表すにすぎない．よって，このような，抵抗を含む回路の継続的な性質を調べるときには，減衰しない特解のみが重要になる．(現実の回路では，素子としての抵抗が含まれていなくても，導線の抵抗や電源の抵抗が存在するため，一般解は必ず減衰する．)

交流回路の特解を得る便利な方法がある．それは，以下のような，オームの法則の一般化である．直流回路の解析の基礎は，キルヒホフの第 1 法則と第 2 法則であった．交流回路の場合もそれに対応する定式化ができる．そのためには，交流の場合について，各素子の端子間の電位差あるいは逆起電力

すなわち電圧と素子に流れ込む電流の関係を知る必要がある．

抵　抗

抵抗 R の両端の電位差（電圧）が

$$V(t) = V_0 \cos \omega t \tag{10.51}$$

のように変動しているとき，抵抗に流れ込んでいる電流は

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0 \cos \omega t}{R} \tag{10.52}$$

のはずである．この場合，電圧と電流の位相は一致している．

コンデンサー

容量 C のコンデンサーの両端の電位差 $V(t)$ と電流 $I(t)$ の関係は (10.2) で与えられるから，極板間の電位差（電圧）が (10.51) のとき

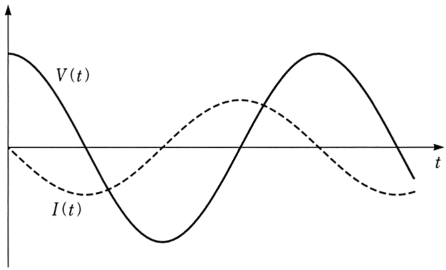


図 10.16

$$\begin{aligned} I(t) &= C\frac{dV(t)}{dt} \\ &= -\omega C V_0 \sin \omega t \\ &= \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{10.53}$$

で表される．つまり，電流の位相は $\omega + \pi/2$ だから図 10.16 のように電圧よりも $\pi/2$ だけ進んでいる．

コ イ ル

コイルの両端の逆起電力 (10.3) は，電流の時間微分で決まるから，電流が流れ込もうとすることが原因で，逆起電力（電圧）は結果である．しかしいまは，電流と逆起電力の位相関係を知りたいのであるから，逆に逆起電力

$$\mathcal{E}_L(t) = V_0 \cos \omega t \tag{10.54}$$

が生じているときの電流を求めよう．(10.3) を $I(t)$ について解いて

$$I(t) = -\frac{1}{L}\int_0^t \mathcal{E}_L(t)\,dt = -\frac{1}{L}\int_0^t V_0\cos\omega t\,dt = \frac{V_0}{\omega L}\Big[\sin\omega t\Big]_0^t$$
$$= \frac{V_0}{\omega L}\sin\omega t = \frac{V_0}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (10.55)$$

である．つまり，電流は図 10.17 のように電圧よりも $\pi/2$ だけ位相が遅れる．(この例では $I(0) = 0$ であるが，もし $I(0) \neq 0$ であっても無視してよい．抵抗を含む現実の回路では減衰してしまう成分に対応する項だからである．)

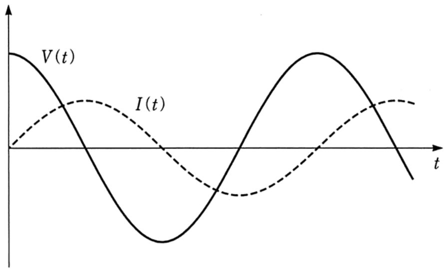


図 10.17

このように，コンデンサーやコイルの場合を抵抗の場合と比べると，電圧と電流の振幅の比が C や L のみならず角振動数 ω にも依存しており，かつ，位相の進みや遅れが生じている．電流の位相は，コンデンサーだけに注目すると C の値によらず常に $\pi/2$ だけ進み，コイルだけに注目すると L の値によらず常に $\pi/2$ だけ遅れる．このことから，種類の異なる素子を複数つないだ回路の性質の解析は複雑になることが予想される．

§10.5　複素インピーダンス

異なる種類の複数の線形素子を含む回路の解析を簡単に扱う方法が，オームの法則を拡張した複素インピーダンスの方法である．この方法では，交流の電圧，電流を三角関数ではなく複素指数関数を用いて表す．指数関数の導

関数や不定積分は，三角関数の場合と違い同じ指数関数で係数のみが変るので，便利なのである．

電圧を，(10.51) の代りに複素数

$$\tilde{V}(t) = V_0 e^{i\omega t} = V_0(\cos \omega t + i \sin \omega t) \tag{10.56}$$

で表す．この $\tilde{V}(t)$ の実数部が実際の交流を表している．$|\tilde{V}(t)| = V_0$ が実際の交流電圧の振幅，$\tilde{V}(t)$ の位相が実際の交流電圧の位相である．これを用いて，抵抗，コンデンサー，コイルの両端の電圧と電流の関係を表すと，抵抗の場合は

$$\tilde{I}(t) = \frac{\tilde{V}(t)}{R} \tag{10.57}$$

である．コンデンサーの場合は

$$\tilde{I}(t) = C\frac{d\tilde{V}(t)}{dt} = C\frac{d}{dt} V_0 e^{i\omega t} = i\omega C V_0 e^{i\omega t} = i\omega C \tilde{V}(t) \tag{10.58}$$

である．また，コイルの場合は

$$\tilde{I}(t) = -\frac{1}{L}\int_0^t \tilde{V}_L(t)\,dt = -\frac{1}{L}\int_0^t V_0 e^{i\omega t}\,dt = \frac{V_0}{i\omega L}\Big[e^{i\omega t}\Big]_0^t$$
$$= \frac{V_0}{i\omega L}(e^{i\omega t} - 1) \tag{10.59}$$

であるが，ここで，前節と同じように定数

$$\tilde{I}(0) = -\frac{V_0}{i\omega L} \tag{10.60}$$

を無視すると，

$$\tilde{I}(t) = \frac{V_0}{i\omega L} e^{\omega t} = \frac{\tilde{V}(t)}{i\omega L} \tag{10.61}$$

である．以上をまとめて

$$\tilde{I}(t) = \frac{\tilde{V}(t)}{Z} \tag{10.62}$$

と書くとき，Z を**複素インピーダンス**，あるいは単に**インピーダンス**という．

上の計算から，抵抗，コンデンサー，コイルの複素インピーダンスは，それぞれ

$$\textbf{抵　抗：}\qquad Z_R = R \tag{10.63}$$

$$\textbf{コンデンサー：}\qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C}\left(= -\frac{i}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}e^{-i\pi/2}\right) \tag{10.64}$$

$$\textbf{コイル：}\qquad Z_L = i\omega L (= \omega L\, e^{i\pi/2}) \tag{10.65}$$

である．

Z_C, Z_L は R と同じ次元と SI 単位をもつはずであるが，一応確かめておこう．

$$[Z_C] = [\omega]^{-1}[C]^{-1} = TQ^{-1}[V] = ML^2T^{-1}Q^{-2} \quad : \quad \Omega$$

$$[Z_L] = [\omega][L] = T^{-1}[V]TI^{-1} = [V]I^{-1} = ML^2T^{-1}Q^{-2} \quad : \quad \Omega$$

このように，各理想的な素子のインピーダンスは実数か純虚数であるが，異なる素子を含む回路の全インピーダンスは，一般の複素数になる．それを実数 R，X を用いて

$$Z = R + iX \tag{10.66}$$

と書くとき，実数部 R を**抵抗**，虚数部 X を**リアクタンス**という．

例題 10.4

複素インピーダンスを用いて，抵抗，コンデンサー，コイルの両端の電位差，あるいは逆起電力と電流の位相の関係を求めなさい．

[**解**]

$$\text{抵　抗：}\qquad \tilde{I}(t) = \frac{\tilde{V}(t)}{Z_R} = \frac{\tilde{V}(t)}{R} \tag{10.67}$$

だから位相差はない．

$$\text{コンデンサー：}\quad \tilde{I}(t) = \frac{\tilde{V}(t)}{Z_C} = i\omega C\tilde{V}(t) = \omega C\tilde{V}(t)\,e^{i\pi/2} = \omega CV_0\,e^{i(\omega t+\pi/2)} \tag{10.68}$$

より，電流の位相が $\pi/2$ だけ進む．

$$\text{コイル：}\quad \tilde{I}(t) = \frac{\tilde{V}(t)}{Z_L} = \frac{\tilde{V}(t)}{i\omega L} = -i\frac{\tilde{V}(t)}{\omega L} = \frac{\tilde{V}(t)}{\omega L}e^{-i\pi/2} = \frac{V_0}{\omega L}e^{i(\omega t - \pi/2)} \tag{10.69}$$

より，電流の位相が $\pi/2$ だけ遅れる．

合成インピーダンス

複数の素子からなる交流回路の解析の例として，図 10.18 のように，複素インピーダンスが Z_1, Z_2 であるような素子を直列につないで交流電源から起電力 (10.49) が加えられた場合を考える．複素インピーダンスを使った解析では，この起電力を

$$\tilde{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \tag{10.70}$$

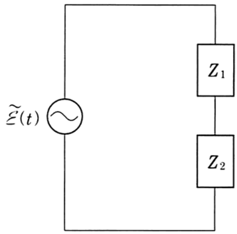


図 10.18

に置き換える．そうすると，複素電流 $\tilde{I}(t)$ はキルヒホフの第 2 法則より，端子間の複素電位差の和が電源の複素起電力に等しいと置いて

$$Z_1\tilde{I}(t) + Z_2\tilde{I}(t) = \tilde{\mathcal{E}}(t) \tag{10.71}$$

から求めることができる．これは，(10.5) と異なり単なる代数方程式だから，解は簡単に得られ

$$\tilde{I}(t) = \frac{\tilde{\mathcal{E}}(t)}{Z} \tag{10.72}$$

$$\text{ただし}\qquad Z = Z_1 + Z_2 \tag{10.73}$$

となる．以上からわかるように，複素インピーダンスを用いることにより，交流回路が抵抗だけを含む直流回路と同じ扱いで解析できる．すなわち，回路のつなぎ方から素子の**合成インピーダンス**を計算して，それを (10.72) に代入するだけで複素電流が得られる．Z を複素指数関数を用いて

$$Z = |Z|e^{i\theta} \tag{10.74}$$

と表すと

$$\tilde{I}(t) = \frac{\tilde{\mathcal{E}}(t)}{|Z|e^{i\theta}} = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|}e^{i(\omega t-\theta)} \qquad (10.75)$$

である．実際の電圧と電流の関係は，この実数部分をとって

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|}\cos(\omega t - \theta) \qquad (10.76)$$

である．このように，合成インピーダンスの絶対値から電流の振幅が，また合成インピーダンスの位相から電圧と電流の位相差が決まる．

(10.62) で Z は分母にあるため，Z の位相が θ のとき，電流の**初期位相**（$t=0$ のときの位相）はこのように $-\theta$ になる．

RC 回路

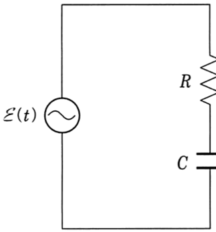


図 10.19

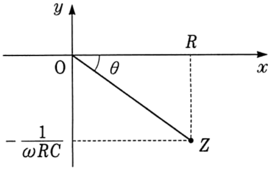


図 10.20

図 10.19 のような RC 回路に交流電源 (10.49) をつないだ場合を考える．合成インピーダンスは

$$Z = Z_R + Z_C = R + \frac{1}{i\omega C} = R - \frac{i}{\omega C} \qquad (10.77)$$

つまり，抵抗は R，リアクタンスは $-1/\omega C$ である．Z をガウス平面で表すと図 10.20 のようになるから，複素指数関数を使うと

$$Z = |Z|e^{i\theta}, \qquad |Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}}, \qquad \tan\theta = -\frac{1}{\omega RC} < 0 \qquad (10.78)$$

である．$\theta < 0$ だから，(10.76) より電流は電圧に比べて位相が進んでいる．

この位相差はもはや，コンデンサーだけの回路のように $\pi/2$ ではなく，しかも ω に依存する．(ただしこの場合も，コンデンサーだけの端子電圧と流れ込む電流の関係は (10.68) で表され，電流の位相が常に $\pi/2$ だけ進んでいる．)

$|Z|$ は直流 $(\omega\to 0)$ に対して無限大だからこの回路は直流を流さない．また $(\omega\to\infty)$ で $|Z|=R$ になる，つまり，高い周波数の交流に対してコンデンサーの部分は**短絡**（**ショート**）したのと同じである．

例題 10.5

図 10.21 の回路において，交流電源の起電力の振幅 $\mathcal{E}_0=10$ V，$C=1\,\mu$F，$R=1$ kΩ とする．$\omega\to\infty$ での電流振幅 I_∞ と電圧に対する位相を求めなさい．また，電流振幅 $I=I_\infty/10$ になる周波数，および，そのときの電圧に対する電流の位相を求めなさい．

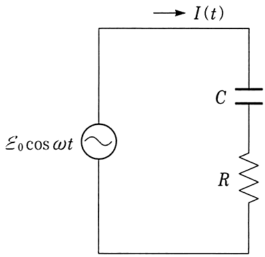


図 10.21

［**解**］ (10.78) より，$\omega\to\infty$ のとき

$$|Z|\to R,\qquad \tan\theta\to 0 \tag{10.79}$$

だから

$$I_\infty=\frac{\mathcal{E}_0}{R}=\frac{10}{10^3}=10^{-2}\,\mathrm{A}\quad\text{で}\quad\theta=0 \tag{10.80}$$

つまり位相差はない．また，$I=I_\infty/10$ になるのは

$$\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}=10R \tag{10.81}$$

のときだから

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{99}\,RC}\quad\text{より}\quad f=\frac{1}{2\pi\sqrt{99}\,RC}=16.0\,\mathrm{Hz} \tag{10.82}$$

である．また，

$$\tan\theta = -\sqrt{99} = -9.95 \quad より \quad \theta = -1.47\,\mathrm{rad} = -84.3° \tag{10.83}$$

である．よって，(10.75) より電流の位相の方が 1.47 rad (84.3°) だけ進んでいる．

RL 回 路

次に，図 10.22 のような *RL* 回路に，交流電圧源をつないだ場合を考える．*RC* 回路の場合と同様にして合成インピーダンスは

$$Z = Z_R + Z_L = R + i\omega L \tag{10.84}$$

つまり，抵抗は R，リアクタンスは ωL である．これをガウス平面に描くと図 10.23 のようになるから，

$$Z = |Z|e^{i\theta}, \quad |Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2},$$
$$\tan\theta = \frac{\omega L}{R} > 0 \tag{10.85}$$

である．Z の位相 $\theta > 0$ だから電流は電圧に比べて位相が遅れている．位相差は ω に依存する．また，$\omega \to 0$ に対しては $|Z| = R$ だから，コイルは直流に対しては単なる導線の役割しか果たさない．$\omega \to 0$ では $|Z| \to \infty$ になり電流が流れなくなる．これは高い周波数の交流は変化が激しいので，大きな逆起電力が生じて電流が流れないからである．

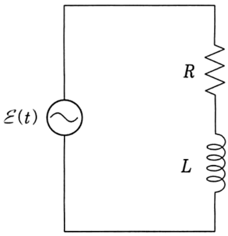


図 10.22

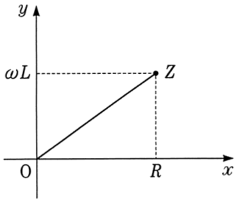


図 10.23

LCR 回 路

次に，図 10.24 のような *LCR* 回路に，同じ交流電源をつないだ場合は，合成インピーダンスは

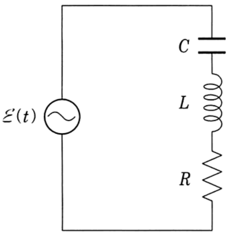


図 10.24

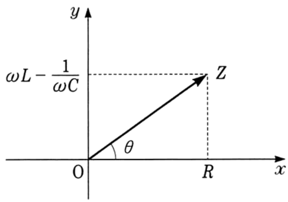


図 10.25

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{10.86}$$

つまり，Z の抵抗は R，リアクタンスは $\omega L - 1/\omega C$ である．これをガウス平面に描くと図 10.25 のようになるから，

$$Z = |Z|e^{i\theta}, \quad |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \tan\theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{10.87}$$

である．この場合，θ の符号が角振動数 ω に依存して変化する．

この回路の $|Z|$ は $\omega \to 0$ に対しても $\omega \to \infty$ に対しても ∞ になり，電流が流れなくなる．そして，途中に $|Z|$ が極小をとる角周波数がある．それは

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \tag{10.88}$$

を満たす角周波数で，このときの ω を ω_0 とすると

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{10.89}$$

である．ω_0 を**共振角周波数**，f_0 を**共振周波数**という．このとき $|Z| = R$ であり，あたかも，コンデンサーとコイルがない場合と同じ電流が流れる．また，このとき $|Z| = R$（実数）だから $I(t)$ の位相は $V(t)$ に等しい．

演習問題

［1］ コイルに直流電流が流れている状態で，その電流を遮断するように回路の一部を切るとそこに火花が飛ぶ．その理由を説明しなさい．

［2］ 抵抗 $R = 10\,\Omega$ と自己インダクタンス $L = 50\,\mathrm{mH}$ のコイルを直列につないだ回路に 100 Hz，振幅 30 V の交流電圧を加えたときに流れる電流と，電流の電源電圧に対する位相差を求めなさい．

［3］ 抵抗 R と，静電容量 C のコンデンサーを直列につないだ回路に振幅 $\mathcal{E}_0$，周波数 f Hz の交流電源をつないだところ，抵抗に振幅 V の電圧が発生した．R と C の関係を求めなさい．

［4］ LCR 回路を流れる電流の振幅が共振時の $1/\sqrt{2}$ となる角周波数を ω_1，ω_2 $(\omega_1 < \omega_2)$ とするとき，$\omega_2 - \omega_1$ を半値幅という．また，共振角周波数を ω_0 とするとき，$Q = \omega_0/(\omega_2 - \omega_1)$ は共振の鋭さを表す量である．これを Q 値という．共振の半値幅と Q 値を L，C，R で表しなさい．

［5］ 図 10.26 の回路で，$L = 100\,\mathrm{mH}$，$C = 0.1\,\mu\mathrm{F}$，$R = 100\,\Omega$ である．スイッチ S を開いた状態でコンデンサーに外部から直流電源をつなぎ 10 V に充電する．次に電源をはずしてスイッチ S を閉じた．その後の回路の電流の様子を調べなさい．

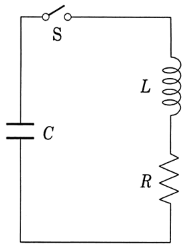


図 10.26

11 物質の磁気的性質

第8章で電流の周りに磁場ができることを学んだが，永久磁石の磁気作用は電流の磁気作用が見出されるずっと以前から知られていた．ただし，磁場の概念はファラデーに由来するものだから，それ以前は磁石の間にはたらく力として磁気の効果が認識されていた．磁石は2種類の異なる極（N極S極とよばれる）をもち，同種の極は反発し合い，異種の極は引き合う．このことから，電荷に類似する磁荷が存在し，力の原因になっているように思われる．しかし，長年の探索の努力にもかかわらず，磁荷は発見されていない．磁石の内部でさえ，マクスウェルの方程式(8.91)，すなわち，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対するガウスの法則の右辺は0なのである．本書では，磁荷の存在はモデルとしても仮定しないで，磁場について学んでいくことにする．

§11.1　物質の磁性に関する実験事実

大部分の物質の示す磁気的性質は誘電的性質に比べると顕著でないが，すべての物質は何らかの磁気的性質をもっている．物質をその磁気的性質に注目して扱うとき，それを**磁性体**という．ただし，単に磁性体というときに強磁性体という特殊な物質を意味することもあるので，混乱を避けるために，本書では磁性体一般を単に物質とよぶことにする．

物質の磁気に関する実験事実として，以下の現象をあげておこう．図11.1のように電流を流したあまり長くないソレノイドコイルの中にちょうど収まる棒状の物質を挿入し，周りの真空中の磁場を精密に測定すると，物質の種

類によって次の3つの場合がある．

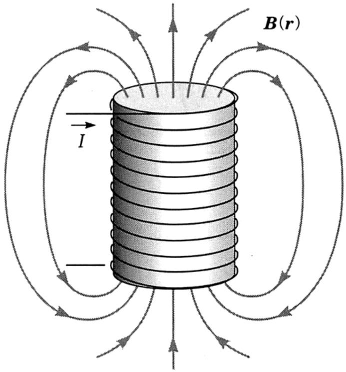


図 11.1

（a）　物質を挿入すると磁場はわずかに弱くなる．コイルの電流を0にもどすと磁場も0になる．

（b）　物質を挿入すると磁場はわずかに強くなる．コイルの電流を0にもどすと磁場も0になる．

（c）　物質を挿入すると磁場は相当強くなる．コイルの電流を0にもどしても弱い磁場が残る．

（c）′ 磁場は相当強くなる．コイルの電流を0にもどしても相当強い磁場が残る．それぞれの物質は，(a)　**反磁性体**，(b)　**常磁性体**，(c)　**磁気的に軟らかい強磁性体**，(c)′ **磁気的に硬い強磁性体**，とよばれている．

身の周りにある多くの絶縁体や銅などの金属は反磁性体である．金属でも，アルミニウムなどは常磁性体である．また，鉄やコバルトなどの金属やそれらの合金や化合物は強磁性体である．鉄でも軟鉄は軟らかい強磁性，鋼(はがね)は硬い強磁性を示す．

強磁性体は磁気の効果が大きく，また永久磁石はわれわれにとって身近なものなので，磁性体といえば強磁性体を思い浮かべるが，われわれがいま学んでいる電磁気学においては強磁性はむしろ特殊な磁性であるから，学習の際に安易に永久磁石を典型的な例として思い浮かべない方がよい．第7章で誘電体について学んだとき，強誘電体は特殊な例であった．強磁性体は，いわば強誘電体に相当する特殊な物質である．

本書では，物質のマクロな磁性に共通な事柄を最初に学び，次に，線形な

性質を示す反磁性と常磁性に対する考察と，強磁性体に対する考察を区別して行う．

§11.2　原子・分子・イオンの磁気モーメントと物質の磁化

物質の磁性は，微視的に見ると，図 11.2 に模式的に示す原子や分子やイオンがもつ磁気モーメントの効果である．この磁気モーメントは，

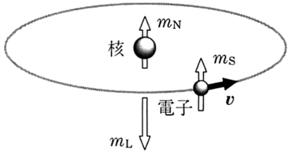


図 11.2

i）　電子の**スピン**（自転を意味する．ただし，実際に自転しているわけではない）に起因するもの．（図 11.2 の m_S）

ii）　電子が原子核の周りを回る**軌道運動**に起因するもの．（図 11.2 の m_L）

iii）　原子核のスピンに起因するもの．（図 11.2 の m_N）

とから成り立っている．原子や分子やイオンは通常複数個の原子核と電子から成り立っているから，それらからの寄与の和が，個々の原子，分子，イオン等の磁気モーメントとなる．ただし，原子核の磁気モーメントは一般に電子のスピンによる磁気モーメントより 3 桁ほど小さいので，マクロな磁場にはほとんど寄与しない．

反磁性体では，それを構成する原子，分子，イオン等の電子のスピンおよび軌道運動による磁気モーメントが完全に打ち消し合って 0 になっている．これに外からの磁場をかけると，その磁場を打ち消そうとするかのように電子の軌道運動が変化する．電磁誘導と似たようなことが起きるのである．このため周りの磁場がわずかながら弱くなる．これは自然の基本的性質であるから，常磁性体や強磁性体を含めてすべての物質に存在する効果である．物質が導体の場合は，このほかに外からの磁場の増加にともなって電磁誘導に

よるマクロな電流が起きる．しかし，通常の導体では，この電流は抵抗によってジュール熱に変換され，消えてしまうので，外場が一定になった状態では考えなくてよい．**超伝導状態**にある物質ではこの電流が流れつづける．

常磁性体を構成する原子，分子，イオンの場合は外から磁場がかけられていないときも磁気モーメントは0でない．しかし，外場がないときは，それらの磁気モーメントの向きがバラバラなので，物質全体としてはマクロな磁気はもたない．外から磁場をかけると，各原子などの磁気モーメントがある程度同じ向きにそろう．その効果は反磁性的な軌道の変化の効果を上回り，物質は磁場の向きにマクロに磁化する．

強磁性体では，原子，分子，イオン等の磁気モーメント同士が強く相互作用して，磁気モーメントの整列の度合が常磁性体に比べるとはるかに大きくなる．これによって，周りに強い磁場を作る．また，一度整列すると，外からの場がなくなってもイオンが互いの整列状態を保つように協力し合って，磁化したままになる．これを**自発磁化**といい，これが永久磁石の状態である．

§11.3　ミクロな磁気モーメントとマクロな磁場

磁　化

ミクロな磁気モーメントの集合をマクロな電磁気学で扱うには，物質の誘電的性質を扱った場合と同じように，粗視化の手続きが必要である．磁気の場合は，図11.3(a)のような原子，分子，イオン等の磁気モーメントを

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i(\Delta V\text{内})} \boldsymbol{m}_i}{\Delta V} \qquad \text{(粗視化の意味で)} \tag{11.1}$$

のように粗視化して，**磁化**とよばれるベクトル場 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ を定義する．$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ の次元とSI単位は

$$[M] = [\boldsymbol{m}]L^{-3} = QT^{-1}L^2L^{-3} = QT^{-1}L^{-1}: \quad \text{A/m} \tag{11.2}$$

で $\boldsymbol{H}$ と同じである．当然，磁気モーメント $\boldsymbol{m}$ とは次元が異なる．$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ の

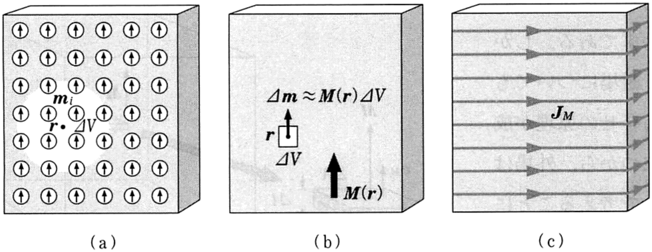


図 11.3

大きさは単位体積当りの磁気モーメントに等しい．$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ を用いると，図11.3(b) のような微小体積内の磁気モーメントは

$$\varDelta \boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) \approx \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})\varDelta V \tag{11.3}$$

である．

用語について注意しておくと，物質のミクロな磁気モーメント $\boldsymbol{m}_i$ がそろうことをその物質が「磁化する」というが，単に「磁化」という場合は上のように粗視化によって定義したベクトル場 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ を意味する．

磁 化 電 流

個々のミクロな原子，分子，イオン等の磁気モーメントはミクロな磁場を作るから，その集合体も磁場を作る．それは，各磁気モーメントの作る磁場の単純な重ね合せになる．マクロな磁場はそれとは異なり，原子などの磁気モーメントをまず磁化 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ で表現してから重ね合わせたものである．その数学的な手続きは，§7.5 で行った分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ が作る静電ポテンシャルの重ね合せの計算よりさらに込み入っているので，ここでは行わない．その代り，磁気モーメントが電流ループと等価であることを利用して，単純な考察を行うことにする．

いま，簡単のために一様に磁化して磁化 $\boldsymbol{M}$ をもつ物質を考える．この物質が強磁性体の永久磁石の状態でない限り，磁化の原因となった外からの磁場

が同時にかかっているはずである．しかし，磁場についても重ね合せの原理が成り立つから，外場はあとで考えることにして，まず磁化による磁場だけを考える．

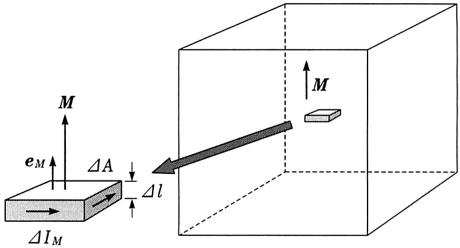


図 11.4

この物質の内部に，図 11.4 のような，磁化に垂直な底面積 $\varDelta A$，厚さ $\varDelta l$ の微小な直方体を切り出す．それに含まれる磁気モーメントは

$$\varDelta \boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}\,\varDelta V = \boldsymbol{M}\,\varDelta A\,\varDelta l \tag{11.4}$$

である．一方 § 8.10 で学んだように，磁気モーメントは電流ループと等価だから，注目している微小な直方体の側面を流れる仮想的な電流 $\varDelta I_M$ を用いて

$$\varDelta \boldsymbol{m} = \varDelta I_M\,\varDelta A\,\boldsymbol{e}_M \tag{11.5}$$

と表すことができる．$\varDelta I_M$ を**磁化電流**または**アンペール電流**という．$\boldsymbol{e}_M$ は $\boldsymbol{M}$ の向きの単位ベクトルである．$\varDelta I_M$ の向きは，$\boldsymbol{e}_M$ の向きに進む右ネジを回す向きである．$\varDelta I_M$ の大きさはこれらの式から

$$\varDelta I_M = M\,\varDelta l \tag{11.6}$$

である．$\varDelta I_M$ は，板の厚さ $\varDelta l$ に比例するが，面積 $\varDelta A$ には依存しない．このことから微小領域の形は直方体でなくともよいことがわかる．そこで，この物質を

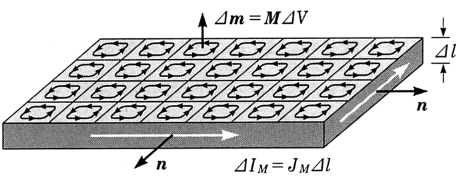


図 11.5

まず多くの薄板に分け，薄板をさらに多数の微小部分に区分けする．図 11.5 に薄板の一枚を示す．微小部分の側面の境界では，隣同士の微小部分の磁化電流は大きさが同じで向きが反対なので打ち消し合い，結局薄板の外周を流れる磁化電流のみが残る．一様に磁化した物質の場合，厚さの等しいどの微小部分の側面を流れる磁化電流も同じだから，結局，外周の磁化電流も同じ (11.6) である．単位長さ当りの大きさ，つまり面電流密度は，

$$J_M = \frac{\Delta I_M}{\Delta l} = M \tag{11.7}$$

である．もし物質が任意の形であれば，薄板は一般に図 11.6 のように側面が $\boldsymbol{M}$ に平行でない．この場合は，同じ磁化電流 ΔI_M がより広い面積を流れているので，面電流密度 J_M はその分だけ小さく，

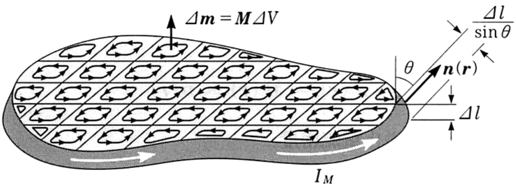


図 11.6

$$J_M = \frac{\Delta I_M}{\Delta l}\sin\theta = M\sin\theta \tag{11.8}$$

となる．θ は，磁化 $\boldsymbol{M}$ と側面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ の間の角度を表す．以上から，磁化電流は向きも含めて**表面磁化電流密度**ベクトルの場

$$\boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \tag{11.9}$$

で表されることがわかる．つまり，一様に磁化した物質内の磁化 $\boldsymbol{M}$ 全体が作る磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は，図 11.3(c) のように側面に面電流密度 $\boldsymbol{J}_M$ の磁化電流が流れているときの磁束密度に等しい．磁化電流を磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ ではなく

磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に関係づけるのは，$\boldsymbol{B}$ の方が本質的な場だからである．物質中の $\boldsymbol{H}$ については，あらためて物質の磁化を含む形に定義を一般化することになる．

なお，磁化電流は物質内のすべての磁化の効果の重ね合せと同等の効果をもつ電流として考えたものであり，実際に電流が流れているわけではない．また，あらかじめ分子等の $\boldsymbol{m}_i$ を粗視化して連続的なベクトル場である磁化 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ に置き換えてしまったのだから，ここで行った考察で，個々の原子，分子，イオン等を思い浮かべてはならない．図 11.5 の $\Delta\boldsymbol{m}$ は，分子等の磁気モーメントを表すのではなく，分子の体積とは無関係の微小体積 ΔV に含まれる磁気モーメント $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})\,\Delta V$ を表している．

一般の一様でない磁化 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ から出発して，その全体が作るマクロな磁場を，ここで行った操作に対応する数学的に厳密な扱いで計算すると，表面磁化電流密度

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) \tag{11.10}$$

と内部に存在する**体積磁化電流密度**

$$\boldsymbol{j}_M(\boldsymbol{r}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \tag{11.11}$$

に置き換えることができる．ここでは一様な磁化から出発したので，後者は現れなかった．もっとも，一般に強磁性体を含めて一様な物質では体積磁化電流密度を想定する必要はほとんどない．((11.11)に現れたベクトル場の回転 rot については付録を参照されたい．本節ではここに現れるだけである．)

表面磁化電流密度 J_M の次元と SI 単位は

$$[J_M] = [M] = QT^{-1}L^{-1}:\quad \mathrm{A/m} \tag{11.12}$$

である．

例題 11.1

長さ方向に一様な磁化 $\boldsymbol{M}$ をもつ円柱形および球形の物質の表面磁化

電流密度を求めなさい.

［**解**］ 図11.7(a)のように，円柱形の物質は，中心軸を z 軸とする円筒座標で考えると $\boldsymbol{M} = M\,\boldsymbol{e}_z$ である．上面では法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z$ だから，

$$\boldsymbol{J}_M = M\,\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = 0 \tag{11.13}$$

である．下面も同様に $\boldsymbol{J}_M = 0$ である．側面は $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_\xi$ だから，

$$\boldsymbol{J}_M = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\xi = M\,\boldsymbol{e}_\varphi \tag{11.14}$$

である．

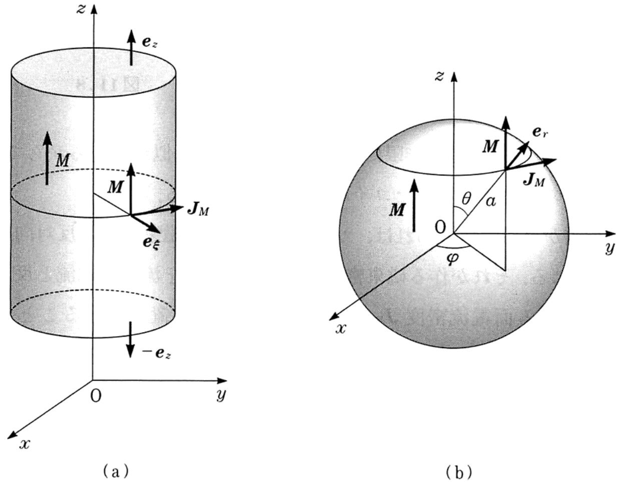


図11.7

半径 a の球の場合は図(b)のように極座標で考えると，表面上の点 $\boldsymbol{r}(a, \theta, \varphi)$ の法線ベクトルは $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_r$ だから，

$$\boldsymbol{J}_M = M\,\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r = M \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi \tag{11.15}$$

である．つまり，赤道面で $J_M = M$ で最も大きく，$B(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ 両極に近づくにしたがって小さくなる．

物質の効果

以上のことから，§11.1 で列挙したあまり長くないソレノイドコイルの中にちょうど収まる物質を入れたときの磁場の様子（図 11.8）が定性的に理解できる．（本書では，物質が存在するときの磁場について一般的に成り立つ事柄を議論するときはあまり長くないソレノイドコイルが作る磁場を，状況を単純化して定量的に考えたいときは，非常に長いソレノイドコイルの中央付近の磁場を考える．後者は無限に長いソレノイドの近似が使えるからである．ドーナツ型の磁性体に巻いたコイルも定量的に扱える．）

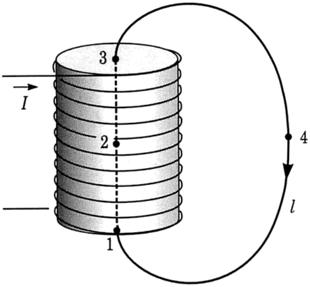


図 11.8

もし物質が反磁性体であれば，ソレノイドの中の磁束密度と反対向きの磁化 $\boldsymbol{M}$ が生じる．それが作る磁束密度は，ソレノイドを流れる電流と反対向きに側面を流れる面電流密度 $\boldsymbol{J}_M$ の磁化電流の効果に置き換えることができる．それは，あたかも外から流している真電流（マクロな電流）が少なくなったかのような効果を生じ，周りの磁場はわずかに弱くなる．もし物質が常磁性体であれば，ソレノイドの中の磁束密度と同じ向きの磁化 $\boldsymbol{M}$ が生じる．磁化が作る磁場は，ソレノイドの真電流と同じ向きの面電流密度 $\boldsymbol{J}_M$ をもつ磁化電流に置き換えることができるから，あたかも真電流が増加したかのような効果を生じ，周りの磁束密度はわずかに強くなる．強磁性体であれば常磁性体の場合と同じ向きで，しかし格段に大きい磁化が生じるので，$\boldsymbol{J}_M$ も格段に大きくなり，ソレノイドに実際の数百倍 ～ 数万倍の大きな真電流が流れた場合と同じ強さの磁束密度ができる．

§ 11.4　物質中の $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$

それでは，物質の内部の磁場はどうなっているのだろうか．それを知るために，物質が存在するときの $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ が満たすべき関係を調べよう．もちろん，ここで考える $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は，外場と物質の磁化 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ が作る磁場とを重ね合わせたものである．われわれは，物質の原子などがもつ磁気モーメントを粗視化して磁化 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ を定義したが，粗視化しなければ，真空中に浮かんで物質を構成している多くの原子核や電子が作る磁場を，真空中の法則をそのまま適用して重ね合わせてもよい．それが困難なので，粗視化の操作を行ったのである．こうして定義された磁化 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ の寄与を含めたマクロな磁場について，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ と関連づけて拡張した $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の定義をすることにより，真空中と同じマクスウェル方程式を満たすことができる．

物質中のマクスウェル方程式

まず，磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ であるが，第 8 章で述べたように真空中では磁場の原因は電流であり，磁束密度がわき出すような**磁荷**は存在しないことから，任意の閉曲面 S に対して，マクスウェル方程式のひとつである磁束密度に対するガウスの法則 (8.91)

$$\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \qquad (11.16)$$

は常に成り立っている．前節で，物質の磁気モーメントの集団を粗視化して磁化ベクトルの場 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ を導入した段階でも，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ 全体が作る磁場と同じ磁場を作る表面磁化電流密度 $\boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{r})$ を導入した段階でも，磁束密度がわき出す源となるような概念は導入されていない．よって，(11.16) は依然として成り立つことになる．当然，閉曲面 S は，物質を含んでいてもよく，全く含んでいなくてもよく，物質の内部を横切っていてもよい．

ただし，物質があっても同じ法則が成り立つということは，物質があっても磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が変化しないということではない．実際，強磁性

体が存在すると $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は大いに変る．しかしその場合でも任意の閉曲面上で基本的な積分法則 (11.16) を満たすような $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ しか存在しえない．そのような $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ しか自然界では許されない，というのがこの式の意味である．

次に，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ について考えよう．真空中では，任意の閉曲線 l に沿って，マクスウェル方程式の一つであるアンペールの法則 (8.40)

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \tag{11.17}$$

は成り立っている．S は l を外周とする任意の面である．面電流や線電流が存在するときは，(8.39 a)，(8.39 b) で考える．いまは定常的な場合を考えているので(9.49) の $d\boldsymbol{D}/dt$ は無視する．

物質中の原子，分子，イオンの磁気モーメントを粗視化して $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ を導入すると，この式はどうなるであろうか．マクロな電磁気学の立場では原子等を点と考えるので，それらがもっている磁気モーメントは，たとえ電子の軌道角運動量によるものであっても，(8.87)の右辺のように電流 I が面積 A の外周を流れていると見るのではなく，それらの積 IA の大きさをもつベクトル $\boldsymbol{m}$ が幾何学的な点の上にあると考える．誘電体の考察において，粗視化に先立って分子の双極子モーメントを幾何学的な点状の双極子モーメントの集団に置き換えたのと同じである．したがって，われわれのモデルには(11.17)の右辺の面 S を貫くミクロな電流，あるいは閉曲線 l と鎖交するミクロな電流ループは存在しない．粗視化の作業はこの磁気モーメント $\boldsymbol{m}_i$ の集団をベクトル場 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ に置き換えただけだから，事情は変化しない．磁化電流 $\boldsymbol{J}_M$ は磁化 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ 全体の効果を置き換えた仮想的な電流だから，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を記述する方程式 (11.17) の右辺の電流に含めてはならないことになる．これは，アンペールの法則 (11.17) が，粗視化した物質が存在する場合にもそのまま成り立つことを意味する．閉曲線 l が物質を通らなくても，物質の中だけを通っても，一部が物質を通る場合にも同様である．以上の枠組の中での，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ に関係づけた物質中の $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の定義の拡張は次節で行う．

定性的考察

具体的にその関係を導く前に，上のように物質が存在するときも（11.17）がそのまま成り立つことを要請すると，たとえば図 11.8 のようなソレノイドコイルの中に置かれた常磁性体の内部の磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ についての情報が得られることを示そう．定性的な議論だからあまり長くないソレノイドについて可能である．

ソレノイドは全部で N 巻きで，電流 I が流れているとする．物質が挿入されていない場合の内外の点 $\boldsymbol{r}$ の磁束密度と磁場の強さを $\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$ とすると，図 11.8 に示したような任意の閉曲線 l について，

$$\oint_l \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{123} \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{341} \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = NI \qquad (11.18)$$

である．物質がないときは，l 上のすべての点で

$$\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}) \qquad (11.19)$$

が成り立っている．ソレノイドの内部にちょうど収まる形の常磁性体を挿入すると，磁化の効果は側面をソレノイドの電流と同じように流れる磁化電流 $\boldsymbol{J}_M(\boldsymbol{r})$ で置き換えられるから，あたかも，ソレノイドの電流が増加したような効果をもつ．したがって，内外で $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の分布の形はほとんど変らず，その大きさ $B(\boldsymbol{r})$ が大きくなる．しかし，この場合も（8.39）は成り立つから

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{123} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{341} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = NI \qquad (11.20)$$

である．ところが中央の表式の第 2 項は増加している．なぜなら，物質の外の空間では（8.19）

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \qquad (11.21)$$

が成り立っているから，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の形は $\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$ とほとんど変らず，大きさだけが $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の増加にともなって

$$H(\boldsymbol{r}) = \frac{B(\boldsymbol{r})}{\mu_0} > \frac{B_0(\boldsymbol{r})}{\mu_0} = H_0(\boldsymbol{r}) \qquad (11.22)$$

のように増加するからである．したがって，（11.20）が成り立つためには第

1 項が減少していなければならない．物質の内部で $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ がどういう関係にあるのかわれわれはまだ学んでいないが，それを知らなくても，マクスウェル方程式が成り立つことだけを頼りにして，ソレノイド内部に置かれた物質中の磁場の強さ $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は物質を挿入する前に比べて減少しているらしいと推論することができるのである．

§ 11.5　物質中の B，H，M の関係

粗視化した物質内の $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の関係を定めよう．誘電体の $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ の関係を導いたときと同様，簡単な場合の考察からそれを導く．

図 11.9 のような非常に長いソレノイドに電流を流す．単位長さ当りの巻き数を n とする．物質が挿入されていない状態でソレノイド内部に生じている磁場は，両端付近を除き一様で

$$\boldsymbol{B}_0 = \mu_z \boldsymbol{H}_0, \qquad \boldsymbol{H}_0 = H_0\,\boldsymbol{e}_z = nI\,\boldsymbol{e}_z \tag{11.23}$$

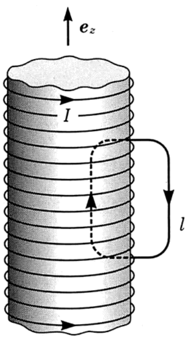


図 11.9

であり，外部の磁場は，両端付近を除きほとんど 0 である．中心軸を z 軸とした．つぎに，電源を調節して電流を一定に保ちながら，ソレノイドの中にちょうど収まる円筒形の物質を挿入する．対称性は変らないから，この状況でも，両端付近を除き，内部の場は一様で，

$$\boldsymbol{B} = B\,\boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{H} = H\,\boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{M} = M\,\boldsymbol{e}_z \tag{11.24}$$

また外部の磁場は両端付近を除きほとんど 0 である．側面の磁化電流密度は

$$\boldsymbol{J}_M = M\,\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n} = J_M\,\boldsymbol{e}_\varphi \tag{11.25}$$

で，マクロな電流と平行で同じ向き（反磁性体の場合は平行で反対向き）である．いま，図に示すような経路 l に沿ってアンペールの法則（8.39）を適用する．表面磁化電流密度 $J_M = M$ はこれに寄与しないから，§ 8.7 の[例 2]

で行った物質がないときと同じ考察をくり返すと

$$\boldsymbol{H} = nI\,\boldsymbol{e}_z \tag{11.26}$$

である．(前節で，ソレノイド内に挿入した常磁性体中の H は一般に減少することを知ったが，ソレノイドが非常に長い場合は，その減少は無視できるほど小さいことがわかる.) 一方，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は，磁化 $\boldsymbol{M}$ の寄与を表す密度 J_M の表面磁化電流とマクロな電流 I で決まり，

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(nI + J_M)\,\boldsymbol{e}_z \tag{11.27}$$

である．(11.7)，(11.26) を代入すると，

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{11.28}$$

である．これは一様な場について求めた関係式であるが，場が一様でなく，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{M}$ が場所 $\boldsymbol{r}$ の関数である場合にも，各点で

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})) \tag{11.29}$$

が成り立つ．この $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ が作る場と外場の和である．

(11.27) に示されているように，マクロな磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対しては，真の電流 I も面電流密度 $\boldsymbol{J}_M$ で記述される磁化電流 I_M も対等に寄与する．このことから一般に，任意の閉曲線 l に対して

$$\oint_l \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \sum_{(l\text{と鎖交する})} I_i + \mu_0 \sum_{(l\text{と鎖交する})} I_{Mj} \tag{11.30}$$

が成り立つ．ただし，I_i は真の電流，I_{Mj} は磁化電流を表す．

ここに現れた 3 個の場のうち，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ は分子の磁気モーメントの粗視化から定義した場，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ はその磁気モーメントを生じさせている場だから，この二つがより本質的である．よって (11.29) はむしろ物質中での $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の定義

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \tag{11.31}$$

とみなすべきである．物質のない空間では，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = 0$ だから，(11.29) は真空中での関係式 (8.19) を含んだ一般的な定義でもある．

例題 11.2

内半径 a_1，外半径 a_2 の十分長い円筒状物質が長さ方向に一様に磁化している．磁化を $\boldsymbol{M}$ とするとき，表面磁化電流密度とそれが作る円筒内外の磁場を求めなさい．

［**解**］ 物質が十分長いので，中央付近は無限に長いソレノイドとの類推で考えることができる．図 11.10 のように，中心軸を z 軸とする円筒座標で記述すると，$\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{e}_z$ である．上面，下面では法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \pm\boldsymbol{e}_z$ だから，表面磁化電流密度は $\boldsymbol{J}_M = \pm M\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_z = 0$ である．外表面の法線ベクトルは $\boldsymbol{e}_\xi$ だから，$\boldsymbol{J}_M{}^{\text{out}} = M\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\xi = M\boldsymbol{e}_\varphi$ である．また，内表面の法線ベクトルは $-\boldsymbol{e}_\xi$ だから，$\boldsymbol{J}_M{}^{\text{in}} = M\boldsymbol{e}_z \times (-\boldsymbol{e}_\xi) = -M\boldsymbol{e}_\varphi$ である．つまり，外表面と内表面の磁化電流は大きさが同じで向きが反対である．磁化 $\boldsymbol{M}$ 全体が作る磁束密度はこの磁化電流が作る磁束密度に置き換えて考えればよい．$\boldsymbol{J}_M{}^{\text{in}}$ が作る場は，

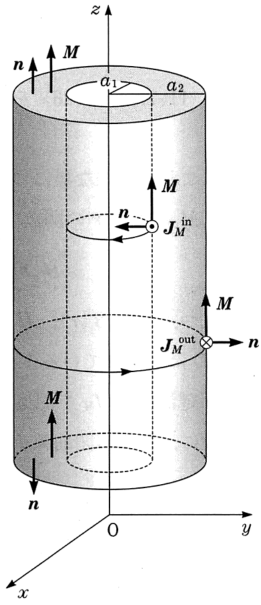


図 11.10

$$\xi < a_1 \quad で \quad \boldsymbol{B}_1 = -\mu_0 J_M \boldsymbol{e}_z = -\mu_0 M\boldsymbol{e}_z, \qquad \xi > a_1 \quad で \quad \boldsymbol{B}_1 = 0 \tag{11.32}$$

である．また，$\boldsymbol{J}_M{}^{\text{out}}$ が作る場は，

$$\xi < a_2 \quad で \quad \boldsymbol{B}_2 = \mu_0 J_M \boldsymbol{e}_z = \mu_0 M\boldsymbol{e}_z, \qquad \xi > a_2 \quad で \quad \boldsymbol{B}_2 = 0 \tag{11.33}$$

である．よって，これらを重ね合わせて，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$ は

$$\xi < a_1 \quad \text{で} \quad \boldsymbol{B} = 0, \qquad a_1 < \xi < a_2 \quad \text{で} \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 M \boldsymbol{e}_z, \qquad \xi > a_2 \quad \text{で} \quad \boldsymbol{B} = 0 \tag{11.34}$$

である．自発磁化した強磁性体（永久磁石）の場合はこれが実際に存在する場である．それ以外の場合はこれに外場を重ねたものが実際に存在する場である．

§11.6　常磁性または反磁性を示す物質の内部の $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{M}$ の関係

前節までで学んだことは，強磁性体を含めたすべての物質のマクロな磁場に対して成り立つ．ここでは，常磁性体や反磁性体の場合にのみ成り立つ関係を学ぶ．そのような物質では $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の 3 つの場は互いに比例する．これを，線形な磁性をもつという．そこで，物質の磁化されやすさを表すパラメターとして**磁化率** χ_{m} を

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = \chi_{\mathrm{m}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{11.35}$$

で定義する．$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は同じ次元の量だから，χ_{m} は無次元の量である．

$$[\chi_{\mathrm{m}}] = [M][H]^{-1} = QT^{-1}L^{-1}(QT^{-1}L^{-1})^{-1} = 1 \quad (\text{無次元})$$

本来 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ は電子に作用する場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と関係づけられるべきであるとして

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = \chi_{\mathrm{m}} \frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})}{\mu_0} \tag{11.36}$$

で磁化率を定義する場合もあるが，ここでは，多数派の流儀にしたがって (11.35) を用いる．これを (11.29) に代入すると

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0(1 + \chi_{\mathrm{m}})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \kappa_{\mathrm{m}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \mu \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{11.37}$$

となる．μ を物質の**透磁率**という．また，

$$\kappa_{\mathrm{m}} = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_{\mathrm{m}} \tag{11.38}$$

を**比透磁率**または**相対透磁率**という．比透磁率は μ_{r} と書かれることもある．(11.35) ～ (11.37) の $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ や $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は，磁化 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ が作る磁場と外場を重

ね合わせた実際に存在する場でなければならない．μ の次元と SI 単位は μ_0 と同じで (8.22) で与えられる．$\kappa_m(\mu_r)$ は無次元である．

表 11.1 に示すように，常磁性体や反磁性体の χ_m は非常に小さく，したがって，$\mu \approx \mu_0$ である．

表 11.1　種々の物質の磁化率 (20°C)

分　類	物　質	磁　化　率　χ_m
反磁性体	銀	-2.4×10^{-5}
	銅	-0.98×10^{-5}
	ダイヤモンド	-2.2×10^{-5}
常磁性体	マグネシウム	1.2×10^{-5}
	アルミニウム	2.1×10^{-5}
	タングステン	7.6×10^{-5}
強磁性体	軟鉄	2.5×10^{2}*, 5.5×10^{3}**
	パーマロイ	8×10^{3}*,　1×10^{5}**
	ミューメタル	2×10^{4}*,　1×10^{5}**

*$\chi_m{}^a$,　**$\chi_m(\max)$

§11.7　物質境界での $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ の接続条件

すべての物質のマクロな磁性に対して成り立つ性質の考察にもどる．$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ が真空中と同じマクスウェル方程式を満たすことがわかったから，これを使って物質境界においてこれらの場が満たす関係(**接続条件**)を求めよう．片方の物質は真空でもよい．境界には，マクロな電流(真の電流)が流れていない場合を考える．ここで考える $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は，磁化 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ が作る場だけでもよく，あるいはそれと外場を重ね合わせた，そこに実際に存在する場でもよい．

$\boldsymbol{B}$ の法線成分 B_n は物質境界で連続

図 11.11(a) のような境界の両側の 2 点 $\boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{r}$ を上底，下底の中心にもつ，底面積が ΔA で非常に薄い円筒について，$\boldsymbol{B}$ に対するガウスの法則 (11.16) を適用する．上底，下底が境界面に平行であれば，それらの法線ベクトルを境界面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて表すことができ，

$$\oint_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \approx \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}\,\Delta A + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')\cdot(-\boldsymbol{n})\,\Delta A \approx 0 \qquad (11.39)$$

である．$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ を境界をはさんで無限に接近させれば ≈ は ＝ になる(§7.7)．

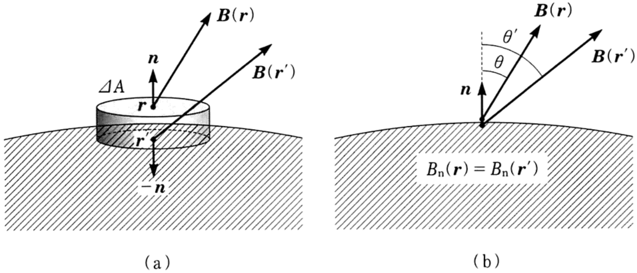


図 11.11

よって，磁束密度の**法線成分** $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n} = B_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r})$ は境界で連続（図(b)）

$$B_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r}) = B_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r}'),\quad \text{つまり}\quad B(\boldsymbol{r})\cos\theta = B(\boldsymbol{r}')\cos\theta' \tag{11.40}$$

である．これは真の電流の有無にかかわらず成り立つ．

$\boldsymbol{H}$ の接線成分 H_{t} は物質境界で連続

図 11.12(a) のように，表面内外の 2 点 $\boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{r}$ を長さ Δl の 2 辺の中心にもつ，高さの非常に低い長方形の経路について $\boldsymbol{H}$ の循環を計算する．境界面に沿った辺に沿っての変位 $d\boldsymbol{r}$ を境界面に平行な単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ を用いて表す

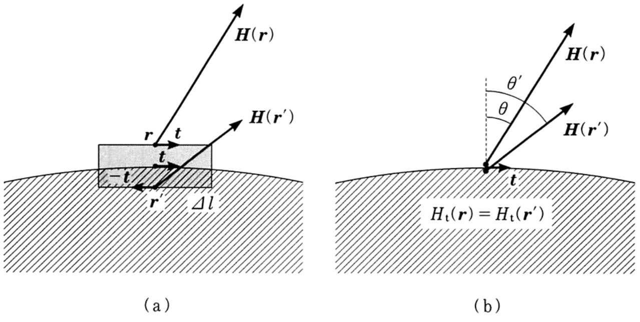


図 11.12

ことができ，マクロな面電流はないと仮定したから

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}\,\Delta l + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\cdot(-\,\boldsymbol{t})\,\Delta l \approx 0 \qquad (11.41)$$

である．$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}'$ を境界をはさんで無限に接近させれば，$\approx$ は $=$ になる．よって，図 11.11(b) のように磁場の強さの**接線成分** $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t} = H_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})$ は物質境界で連続

$$H_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = H_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}'), \quad \text{つまり} \quad H(\boldsymbol{r})\sin\theta = H(\boldsymbol{r}')\sin\theta' \qquad (11.42)$$

である．なお，境界面に真の面電流や線電流が流れている場合の接続条件については，章末演習問題 [6] を参照されたい．

磁場の屈折の法則

(11.40)，(11.42) はいつでも成り立つが，さらに (11.37) が成り立つ物質では，θ，θ' と透磁率 μ，μ' を用いて，接続条件を

$$\frac{\mu}{\tan\theta} = \frac{\mu'}{\tan\theta'} \qquad (11.43)$$

と書くことができる．

例題 11.3

図 11.13 のように一様な外場 $\boldsymbol{B}_0$，$\boldsymbol{H}_0$ に平行に細長い形の物質を置いたとき，その物質の中央付近の内部の $\boldsymbol{H}$ は外場 $\boldsymbol{H}_0$ に等しいことを説明しなさい．（図 11.13 中の矢印は意図的にすべて同じ長さに描いてある．）

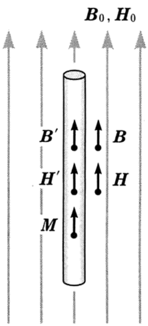


図 11.13

［**解**］ 対称性から，この物質は外場に平行に一様に磁化していると考えてよい．磁化 $\boldsymbol{M}$ が作る磁束密度は長いソレノイドの類推から，中央付近では，

$$\text{物質内部では}\quad \boldsymbol{B}_M = \mu_0\boldsymbol{M}, \qquad \text{外部では}\quad \boldsymbol{B}_M = 0 \tag{11.44}$$

である．よって外部では $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0$ であり，したがって $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0$ である．一方，内部では

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_M) - \boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}_0 + \mu_0\boldsymbol{M}) - \boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} = \boldsymbol{H}_0 \tag{11.45}$$

である．よって，中央付近の内外の $\boldsymbol{H}$ は等しく，しかもそれは外場 $\boldsymbol{H}_0$ に等しい．

［**別解**］ 磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ の接線成分に対する接続条件 (11.42) は常に成り立っている．ところが，上に述べた対称性から，中央付近内外の場は側面に平行，つまり，接線成分は $\boldsymbol{H}$ そのものだから，物質内外で $\boldsymbol{H}$ が等しい．さらに (11.43) によって外部の $\boldsymbol{H}$ が $\boldsymbol{H}_0$ に等しいから，内部の $\boldsymbol{H}$ も外場 $\boldsymbol{H}_0$ に等しい．

§11.8 強 磁 性 体

最後の 2 節で強磁性体について考えよう．強磁性体の第 1 の特徴は非常に大きな磁化が生じることであるが，単にそれだけではない．強磁性体が常磁性体と最も異なる点は，外場の中に置いて磁化させるとき，**履歴（ヒステリシス）現象**が見られることである．履歴現象とは，磁化 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ に比例するとは限らず，直前の $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ の値に依存する現象である．このために，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の比例関係 (11.37) は失われ，向きも必ずしも平行ではない．よって一般には，前節で導入した μ や χ_{m} に単に大きな定数値を与えることで常磁性体と同じように記述することはできない．

履 歴 現 象

履歴現象は，図 11.14 のような H を横軸に，B を縦軸にとったグラフで示されるのが普通である．このグラフを**履歴曲線**という．実線は，磁気的に硬い強磁性体について，外からの場をくり返し反転させながらだんだん強くし

ていった場合の B と H の関係を表す．点線は磁気的に軟らかい強磁性体についての履歴曲線である．また，一点鎖線は，常磁性体中の H と B の関係で，原点を通る直線になる．その傾きが常磁性体の透磁率 μ である．強磁性体と常磁性体をこのように同じ図に描くと，常磁性体を表す一点鎖線は H 軸にほとんど完全に平行になってしまう．図は誇張して H 軸との間に少し角度をもたせて描いてある．

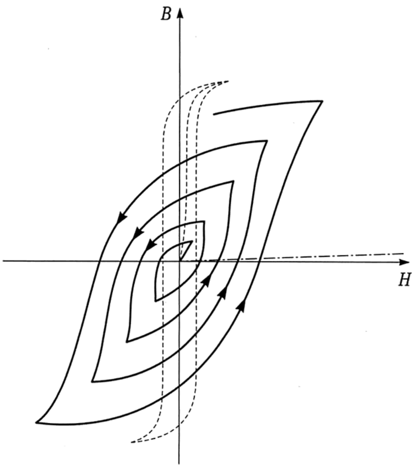


図 11.14

強磁性体の場合，

$$\kappa_{\mathrm{m}}(H) = \frac{M}{H} \qquad や \qquad \mu(H) = \frac{B}{H} \tag{11.46}$$

は H の関数である．例として，図 11.15 に軟鉄の μ を示す．この図の B は図 11.14 の点線の**初期磁化曲線**（$H = 0$，$B = 0$ の消磁状態から出発したときの H - B の関係）と同じものである．また，μ/μ_0 は原点と B 上の各点を結ぶ直線の傾きであり，極大はその直線が B 曲線に接するところで生じる．磁性体の性質の目安として，初期磁化曲線の**初期透磁率** μ_a，あるいは**初期磁化率** $\chi_{\mathrm{m}}{}^a$ や，**最大透磁率** $\mu_{\max}$ あるいは**最大磁化率** $\chi_{\mathrm{m}}{}^{\max}$ が用いられる．表 11.1 にはそれが示してある．

応用の面からいうと，磁気的に軟らかい強磁性体は μ が大きいことを利用して電磁石やトランスやインダクタンスに，磁気的に硬い強磁性体は履歴が

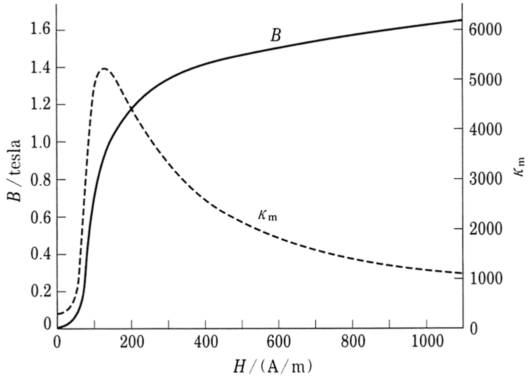


図 11.15

顕著であることを利用して**永久磁石**に利用される.

磁気的に軟らかい強磁性体の応用

磁気的に軟らかい強磁性体の応用は, κ_m したがって μ が極めて大きな常磁性体と考えて, 前節の関係式 (11.37) が近似的に成り立つとして解釈できる性質を利用する.特に,消磁状態から出発して H があまり大きくない範囲(たとえば, 通信機用のコイルのような弱い電流で用いるとき)では, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{M}$ の比例関係がかなりよく成り立っているので, この領域では μ_a や $\chi_m{}^a$ を用いて常磁性体と同じように取扱っても事実上問題ない.

たとえば, 十分長いソレノイドの中に入れた物質が磁気的に軟らかい強磁性体であれば, $\mu \gg \mu_0$ だから, (11.38) より

$$\kappa_m \approx \chi_m \gg 1 \tag{11.47}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_0 \chi_m \boldsymbol{H} \approx \mu_0 \boldsymbol{M} \tag{11.48}$$

である. いつでも成り立つ関係(11.29)と比較すると, $\boldsymbol{B}$ はほとんど磁化 $\boldsymbol{M}$ だけで決まっていることがわかる. 次のように言ってもよい. 磁化の原因はもともと外を流れる真の電流であるが, 内部には, それよりはるかに大きな

面密度 $\boldsymbol{J}_M$ の磁化電流が側面を流れているかのような大きさの $\boldsymbol{B}$ ができる．つまり

$$B = \mu_0\left(\frac{NI}{l} + J_M\right) \approx \mu_0 J_M \tag{11.49}$$

である．

例題 11.4

断面積 A，長さ l で，初期透磁率 $\mu_a \gg \mu_0$ の十分長い円柱形の磁気的に軟らかい強磁性体の側面に導線を N 回巻いたソレノイドの自己インダクタンスを求めなさい．強磁性体がない場合に比べ何倍か．

［**解**］ $\boldsymbol{H}$ は物質があっても同じ方程式を満たすから，§8.7［例 2］と同様に考えて，ソレノイド内部の $\boldsymbol{H}$ は，両端付近を除いて，$H = NI/l$ である．よって内部の磁束密度は $B = \mu_a H = \mu_a NI/l$ である．したがって，自己インダクタンスは

$$L = \frac{BAN}{lI} = \frac{\mu_a N^2 A}{l} \tag{11.50}$$

つまり，強磁性体がない場合に比べて $\mu_a/\mu_0 = \kappa_m{}^a$ 倍になる．

図 11.16 のように，長い円筒状の強磁性体の一部に導線を巻いて電流を流した場合，磁束密度は導線を巻いていない部分でも，両端付近を除き長さ方向に平行で，外部の磁束密度はほとんど 0 である（章末演習問題参照）．これはドーナツ型やその一部を切り取った形の強磁性体についても同じで，この性質がトランスや電磁石に利用される．

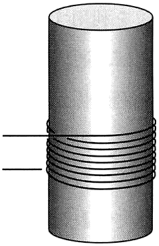


図 11.16

履歴曲線

図 11.14 のような履歴曲線は物質に関する情報を与えるグラフだから，物

質内の H と B (もちろん，ともに外場と磁化が作る場を重ね合わせたもの)を表したものであることに注意する．これを外場に対する応答とみなしたいときは，一様な外場に沿って細長い強磁性体を置いた場合の中央付近の $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ の関係を想定すればよい．前節の例題で学んだように，その付近では強磁性体内外の $\boldsymbol{H}$ は外場の $\boldsymbol{H}$ に等しいからである．あるいはドーナツ型の強磁性体中の $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ を考えてもよい．一般の状況では，外場に対する応答とはみなすことができず，磁性体の内部の場の間の関係に過ぎない．なお，強磁性体中の $\boldsymbol{B}$ はたとえば(11.27)で $J_M \gg nI$ であるから，ほとんど $\boldsymbol{M}$ だけで決まっており，履歴曲線を H - M の関係として描いても同じ形になる．縦軸の次元が異なるだけである．

強磁性体の履歴曲線についてよく理解するためには，本章で学んだことのうち強磁性体に対しては成り立たない§11.6の記述を忘れ，それ以外の記述は成り立つこと，そして，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{M}$ は(11.29)の関係を満たしていれば互いにどのような向きを向いていてもよいことを認識しておく必要がある．また一方，外部空間の場も磁性体の存在の影響を受けて変化しているが，それでも当然関係 (8.19) が成り立っていることにも注意する．

図11.17に示す磁気的に硬い強磁性体の履歴曲線に沿って，内部の磁場の様子を見ていこう．まず，磁化も外場もない消磁状態から出発する．図のa点である．外場を増していくと，初期磁化曲線に沿って内部の H も B も増加するが，それらの間に必ずしも比例関係はないから，常磁性の場合のような直線関係にはならない．外場をさらに増していくと，b点を経

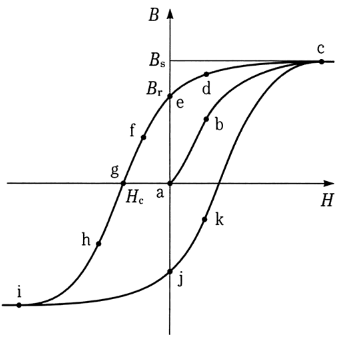


図11.17

由して次第に B は大きくなるが，点 c の状態に達すると もはや増加しなくなる．このときの磁束密度 B_s を飽和磁束密度，磁化 M_s を飽和磁化という．

ところで，強磁性体中でも成り立つはずの（11.29）を見ると，B は H にしたがって増加するはずだから，内部の $\boldsymbol{H}$ が外場の $\boldsymbol{H}$ に等しいとみなせる条件で外場を増すと，B はいくらでも増加しそうに思えるがそうなっていない．このパラドックスは次のように考えれば理解できる．強磁性体中の $\boldsymbol{B}$ は磁化 $\boldsymbol{M}$ でほとんど決まっている．つまり $M \gg H$ である．したがって，磁化がその物質における限界値に近づくと，磁束密度はほとんど増加しなくなる．そのときでも，（11.29）が示すように H が増せば $\mu_0 H$ に相当する分だけ B も増加するが，それはこの図のスケールでは無視できるほど小さいのである．要するにこの部分は，図の一点鎖線（常磁性体の H - B 曲線）を正しいスケールで描いた場合と同様，ほとんど H 軸に平行になる．

さて，点 c の状態から外場を減少して，たとえば H が b 点と同じ大きさの d 点までもどっても，磁束密度 B はあまり変化しない．履歴現象とよばれる所以である．強磁性体の磁化が大きいのは各分子の磁気モーメントが協力し合って配列するためであるが，その同じ協力現象のため，いったん配列してしまうとなかなか元へはもどれず，このため B も変化しないのである．

さらに外場を減らして H が 0 の e 点になっても，磁化が 0 にならないので，磁束密度 B も高い値のままである．この状態の磁化 M_r を**残留磁化**，磁束密度 B_r を**残留磁束密度**という．この状態は，細長い強磁性体の中央部付近やドーナツ型の強磁性体では外場 0 に対応しているが，細長い形でも両端付近や，他の形の磁性体では e 点が外場 0 の状態には対応していない．e 点の意味するところは，一般には，外場と磁化の効果を重ね合わせた H が 0 になっても，B（M）は必ずしも 0 にならない，ということである．

外場をさらに減らして 0 にすると永久磁石（自発磁化）の状態になる．これは，非常に細長い強磁性体やドーナツ型の磁性体では e 点（$H = 0$）であり，非常に薄い板状の強磁性体では g 点（$H \fallingdotseq 0$）である．その他の形の強磁

性体では形によって e から g までのさまざまな点 ($H \fallingdotseq 0$) が対応する．

外場を 0 から今度は逆向きに増加していくと，M が顕著な減少を始め，それにしたがって B も減少して，ついには g 点で $B = 0$ になる．g 点での磁場の強さ H_c を**保持力**という．(この図のスケールでは表せない細かいことであるが，このとき (11.29) より $M = -H \fallingdotseq 0$ だから，$\boldsymbol{M}$ はまだ最初と同じ向きを向いていて，g よりわずか h 寄りの点で 0 になる．) 逆向きの外場をさらに大きくしていくと B や M も最初とは逆の向きに増加を始め，ついには c 点に対応する逆向きの飽和点 i になる．

ここでまた，H の大きさを減らし，0 (j 点) にした後，最初の向きに増加していくと，k を経由する全く別の道筋をたどって再び飽和点 c に達する．磁性体の磁化の状態は，このようなサイクルでは二度と出発点の消磁状態にもどることはない．(ただし，外部磁場をくり返し反転させながら弱くしていくことで，つまり，図 11.14 の実線を逆にたどれば，場をすべて 0 にもどすことができる．これを**交流消磁**という．)

§11.9　永久磁石

最後に，永久磁石について考えよう．図 11.18 のようなあまり長くない，円柱型の強磁性体が，その長さ方向に一様に磁化している場合を定性的に考える．磁化を $\boldsymbol{M}$ とする．この磁石の周りにはマクロな電流なしに磁場ができている．ちなみに，強磁性体から磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が外へ向かう端面を N 極といい，内に向かう端面を S 極という．場の間に，§11.6 で導いた比例関係は成り立たない．しかし，§11.3 ～ §11.5 の扱いは適用できるから，磁石全体の磁化 $\boldsymbol{M}$ が磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を作る効果は，側面を流れる磁化電流の効果に置き換えることができる．したがって，この磁石の内外の磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は，電流が面密度 $\boldsymbol{J}_M$ で流れているソレノイド，すなわち，単位長さ当りの巻き数 n のソレノイドに，$J_M = nI$ になるような電流 $I (= J_M/n)$ が流れているときの，周りの $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と全く同じである．その様子を図 11.18(a) に描いてあ

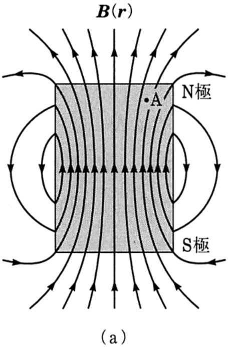


図 11.18

る．この図から，磁化 $\boldsymbol{M}$ が全く一様で長さ方向を向いていたとしても，つまり，$\boldsymbol{J}_M$ は側面のいたるところ一定であっても，$\boldsymbol{B}$ は一般に場所 $\boldsymbol{r}$ の関数であり，特に両端付近でその向きが $\boldsymbol{M}$ の向きからずれることは明らかである．

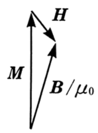


図 11.19

磁場の強さの場 $\boldsymbol{H}$ はどうであろうか．図 11.19 に，その定義（11.31）にしたがって図 11.18 の A 点の $\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{B}/\mu_0$ と $\boldsymbol{H}$ の関係を描いてある．$\boldsymbol{B}$ ではなく $\boldsymbol{B}/\mu_0$ を描いたのは，次元をそろえてベクトルの加減算の作図ができるようにするためである．(実際の強磁性体では，$\boldsymbol{H}$ はこの図では見えないほど小さい．）この図から，$\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{M}$ や $\boldsymbol{B}$ と反対の方向を向いていることがわかる．これを**反磁場**という．これが履歴曲線（図 11.17）の e から g までのどこかの，外場 0 の状態である．他の部分も調べて永久磁石内外の $\boldsymbol{H}$ を描くと図 11.18(b) のようになる．強磁性体の外側では $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ は同じ形をしている．外では(8.19)が成り立っているから当然である．さらに，表面上のすべての位置で(11.40)のように $\boldsymbol{B}$ の法線成分が連続，また（11.42）のように $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の接線成分が連続になっている．

棒状永久磁石

図 11.20 のような長さ方向に一様な磁化 $\boldsymbol{M}$ をもつ十分長い永久磁石については，十分長いソレノイドとの類推で考えることができる．すなわち，(11.26) で $I = 0$ だから，両端付近を除いて，

$$\boldsymbol{H} = 0 \qquad (11.51)$$

また，(11.28) より

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{M} \qquad (11.52)$$

である．

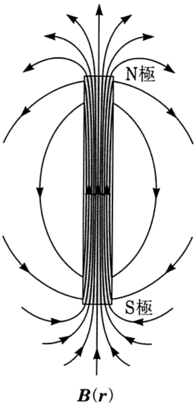


図 11.20

円板状永久磁石

図 11.21 のような，半径 a，厚さ $d\ (\ll a)$ の強磁性体が厚さ方向に一様な磁化 $\boldsymbol{M}$ をもっているとする．磁化電流は側面にのみ想定すればよく，面電流密度 $J_M = M$ で幅 d の側面を流れているから，その大きさは

$$I_M = J_M d = Md \qquad (11.53)$$

である．よって，半径 a の円形回路に真の電流 I が流れている場合 (8.35) の類推から，中心付近の磁束密度は内外で

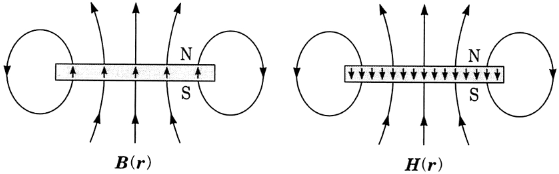


図 11.21

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I_M}{2a}\boldsymbol{e}_z = \frac{\mu_0 J_M d}{2a}\boldsymbol{e}_z = \frac{\mu_0 d}{2a}\boldsymbol{M} \ll \mu_0 \boldsymbol{M} \ll \mu \boldsymbol{M} \qquad (11.54)$$

であり，中心部の $\boldsymbol{H}$ は内部で

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} = \frac{d}{2a}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M} = \left(\frac{d}{2a} - 1\right)\boldsymbol{M} \approx -\boldsymbol{M} \qquad (11.55)$$

外部で

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = \frac{d}{2a}\boldsymbol{M} \ll \boldsymbol{M} \qquad (11.56)$$

である．

演習問題

[1]　単位長さ当り n 巻きのソレノイドに電流 I が流れているとき，nI は面電流密度の次元をもつことを示しなさい．

[2]　ドーナツ状の磁気的に軟らかい強磁性体に導線を N 回巻いたものに電流 I を流した．比透磁率 κ_m を用いて近似的に扱い，ドーナツの断面の中心を通る円周の長さを l として，断面の中心の $\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{B}$ を求めなさい．

[3]　上問の強磁性体に幅 δ の隙間を作ったときの，隙間における磁束密度を求めなさい．ただし，ドーナツ型の中心に沿った長さを l とするとき，$\delta \ll l$ とする．

[4]　κ_m の大きな円柱型の磁気的に軟らかい強磁性体の一部にコイルを巻いて電流を流すと，コイルを巻いていない部分の磁束密度もほとんど磁性体の長さ方向を向いていることを定性的に説明しなさい．

[5]　強磁性体の球が一様に自発磁化している．磁化を $\boldsymbol{M}$ とするとき，表面磁化電流密度および，中心における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ を求めなさい．

[6]　物質の境界に面電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ の真電流が流れているときの磁場の接続条件を求めなさい．また，境界付近を電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ の真電流が流れているときはどうか．

12 電場・磁場のエネルギー

導体対（コンデンサー）を帯電させたり，コイルに電流を流したりするためには，電源が仕事をしなければならない．その仕事はエネルギーとして蓄えられる．そのエネルギーは，電荷や電流が担っていると考えてもよいが，空間に発生した電場や磁場が担っていると考えることもできる．

§12.1　電場のエネルギー

容量 C の導体対が $\pm q$ の電荷を帯電して電位差が

$$V = \frac{q}{C} \tag{12.1}$$

になっている状態の**エネルギー**を求めよう．この状態が，帯電していない状態に比べてエネルギーをもっていることは，図 12.1 のようにこの導体対に抵抗 R をつないで放電させると，電流が流れてジュール熱が発生することからわかる．

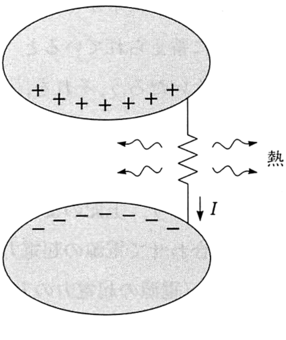


図 12.1

この状態のエネルギーを求めるには，一方の導体から他方へ微小な電荷 dq を次々に q になるまで移すのに要

する仕事を計算すればよい．最初は導体間に電位差がないので，dq を移動するのに要する仕事は0であるが，図12.2のようにすでに $\pm q'$ の電荷が移って電位差が

$$V' = \frac{q'}{C} \qquad (12.2)$$

になっている状態から，さらに dq' を移動するには，

$$dW = V'dq' = \frac{q'}{C}dq' \qquad (12.3)$$

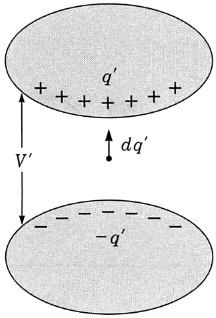


図 12.2

の仕事を要する．したがって，電荷 $\pm q$ を帯電させるまでに要する仕事は

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}dq' = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 \qquad (12.4)$$

である．これが，最終的な電荷配置がもっているエネルギーである．

電荷をこのように配置することによって，最初には存在しなかった電場が導体対の周りに発生する．エネルギーはこの電場に蓄えられていると考えてもよいだろう．それを，図12.3のような平行板コンデンサーの場合を例にとって計算してみよう．上記のような電荷を移す過程は，コンデンサーの極板間の電位差に合わせて電源の起電力をゆっくり上昇させながら充電することで実現できる．（電源の起電力の方を極板間の電位差に合わせているので，§10.1で考えたような矛盾は起こらない．）

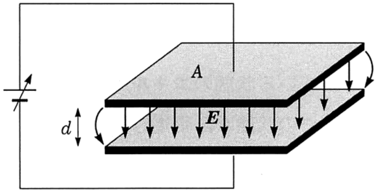


図 12.3

極板の面積 A，間隔 d の平行板コンデンサーの容量は

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \tag{12.5}$$

であるから，両極板に電荷 $\pm q$ が帯電しているときの極板間の電位差は

$$V = \frac{d}{\varepsilon_0 A} q \tag{12.6}$$

である．この状態を作るのに要する仕事は，(12.4) より

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} \left(\frac{d}{\varepsilon_0 A} q \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} V^2 \tag{12.7}$$

である．これに等しいエネルギー

$$U_{\mathrm{C}} = W = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} V^2 \tag{12.8}$$

が，極板間の体積 Ad の直方体の領域の電場に蓄えられているとすると，その密度は

$$u_{\mathrm{e}} = \frac{U_C}{Ad} = \frac{\varepsilon_0}{2d^2} V^2 \tag{12.9}$$

である．

ところで，平行板コンデンサーの極板間の $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$ は縁辺部を除いて一様かつ極板に垂直で，その大きさは

$$E = \frac{V}{d}, \qquad D = \frac{\varepsilon_0 V}{d} \tag{12.10}$$

である．したがって，エネルギー密度 (12.9) を

$$u_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} \frac{V}{d} \frac{\varepsilon_0 V}{d} = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \tag{12.11}$$

と書くことができる．この計算は，極板間の空間の外にもれる電場を無視し同時に縁辺部の弱い電場も中央部と変らないという近似を用いており，厳密なものではないが，結論は正しい．一般に，真空中の電場の強さが $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，電束密度が $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ である点 $\boldsymbol{r}$ における**電場のエネルギー密度**は，

$$u_e(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(\boldsymbol{r})^2 \tag{12.12}$$

である．

u_e の次元と SI 単位は

$$[u_e] = [D][E] = QL^{-2}[F]Q^{-1} = [F]L^{-2} = [\text{仕事}]L^{-3}$$
$$= [\text{エネルギー}]L^{-3} = ML^{-1}T^{-2}:\quad \mathrm{J/m^3} \tag{12.13}$$

で，確かに単位体積当りのエネルギーになっている．

例題 12.1

図 12.4 のように，起電力 $\mathcal{E}$ の定電圧電源を用いて，抵抗 R を介して容量 C のコンデンサーを $V=\mathcal{E}$ まで充電した．このときに，電源がした仕事とコンデンサーに蓄えられているエネルギーとを比較し，その差の意味を説明しなさい．

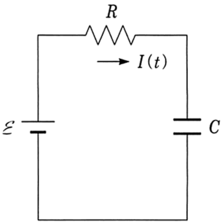


図 12.4

［解］　コンデンサーに蓄えられたエネルギーは

$$U_C = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 \tag{12.14}$$

である．一方，電源がした仕事は

$$W_S = \int_0^T \mathcal{E}I(t)\,dt \tag{12.15}$$

である．ただし，T は $T \gg RC$ を満たす任意の時刻で，すでに充電が終り $I(T) = 0$ になっているものとする．

§10.2 で学んだように

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} \tag{12.16}$$

だから

$$W_S = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^T e^{-t/RC}dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R}(-RC)\Big[e^{-t/RC}\Big]_0^T = C\mathcal{E}^2 \tag{12.17}$$

である．$e^{-T/RC} = 0$ とした．これを（12.14）と比較すると

$$W_S = 2U_C \tag{12.18}$$

であり，電源のした仕事の方が多い．この差は充電中に抵抗 R でジュール熱として消費されたものと考えられる．それを計算してみると

$$W_R = \int_0^T RI(t)^2dt = \int_0^T R\left(\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}\right)^2dt$$
$$= \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^T e^{-2t/RC}dt = -\frac{\mathcal{E}^2}{R}\frac{RC}{2}\Big[e^{-2t/RC}\Big]_0^T = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 \tag{12.19}$$

であり，確かに

$$W_S = W_R + U_C \tag{12.20}$$

である．

球状に一様に分布した電荷の周りの場

厳密に計算できる例として，図 12.5 のような，半径 a の球内に一様な密度 ρ で分布している電荷を考える．まず，無限遠から少しずつ電荷を運んでこの状態を作るのに要する仕事の総量を計算する．すでに半径 r になっているとすると，球表面位置の，無限遠を基準とする静電ポテンシャルは，（4.34）より

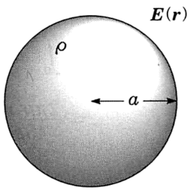


図 12.5

$$\phi(r) = \frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)r^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0} \tag{12.21}$$

である．これにさらに無限小の厚さ dr だけ電荷密度 ρ の層をつけ加えるのに必要な電荷は

$$dq = \rho \times 4\pi r^2 dr \tag{12.22}$$

だから，要する仕事は

$$dW = \phi(r)\,dq = \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\varepsilon_0} \tag{12.23}$$

である．したがって，全仕事は

$$W = \int dW = \int_0^a \frac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\frac{r^5}{5}\bigg|_0^a = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}a^5 \tag{12.24}$$

である．

つぎに，この球ができ上がった状態で，電場に蓄えられているエネルギーを求める．空間の電場は（3.54），（3.56）だから，各点のエネルギー密度は（12.12）によれば

$$\left.\begin{aligned} u_e(\boldsymbol{r}) &= \frac{\rho^2 r^2}{18\varepsilon_0} \qquad (r \leqq a) \\ &= \frac{a^6\rho^2}{18\varepsilon_0 r^4} \qquad (r \geqq a) \end{aligned}\right\} \tag{12.25}$$

である．場は球対称だから，球殻に分けて電場のエネルギーを加え合わせると

$$\begin{aligned} U &= \int_0^\infty 4\pi r^2 u_e(r)\,dr = \int_0^a \frac{2\pi\rho^2 r^4}{9{\varepsilon_0}^2}dr + \int_a^\infty \frac{2\pi a^6\rho^2}{9\varepsilon_0 r^2}dr \\ &= \frac{2\pi\rho^2 r^5}{45\varepsilon_0}\bigg|_0^a - \frac{2\pi a^6\rho^2}{9\varepsilon_0 r}\bigg|_a^\infty = \frac{2\pi\rho^2 a^5}{45\varepsilon_0} + \frac{2\pi\rho^2 a^5}{9\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0}a^5 \end{aligned} \tag{12.26}$$

である．確かにこの電荷配置を作るのに要した仕事（12.24）に等しい．

例題 12.2

半径 a の導体球の上に電荷 q を帯電させるのに要する仕事と，この導体球の周りの電場のエネルギーを比較しなさい．

［**解**］　まず仕事を計算する．電荷は表面にしか存在しない．球がすでに電荷 q' を帯電しているとすると，無限遠を基準とする球の静電ポテンシャルは

$$\phi = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{12.27}$$

である．この状態にさらに無限小の電荷 dq' を付け加えるのに要する仕事は

$$dW = \phi(r)\,dq' = \frac{q'\,dq'}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{12.28}$$

である．よって，電荷 q まで帯電させるのに要する全仕事は

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'\,dq'}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \tag{12.29}$$

である．

つぎに，この球の周りの電場に蓄えられているエネルギーを求める．電場は球の外にのみ存在し，[例題 5.1] で求めたように (4.38)′ で与えられる．よって，各点のエネルギー密度は (12.12) によれば

$$u_e(\boldsymbol{r}) = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \qquad (r > a) \tag{12.30}$$

である．これは球対称だから上と同じように，全エネルギーは

$$U = \int_a^\infty 4\pi r^2 u_e(r)\,dr = \int_a^\infty \frac{q^2}{8\varepsilon_0\pi r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^\infty = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \tag{12.31}$$

であり，この電荷配置を作るのに要した仕事 W に等しい．

§12.2　磁場のエネルギー

電場にエネルギーが蓄えられるのであれば，磁場にも蓄えられるであろう．磁場は電流が流れている状態で存在するから，このエネルギーはその電流が流れている状態をつくるまでに要した仕事に等しいと考えられる．

ソレノイドに蓄えられるエネルギー

図 12.6 のような，自己インダクタンス L の十分長いソレノイドの内部の磁場に蓄えられるエネルギーを計算しよう．理想的なソレノイドに急に電流 I を流そうとしても，

$$\frac{dI}{dt} = \infty \tag{12.32}$$

に応じて無限に大きな逆起電力が生じてそれを妨げるから，流すことができ

ない．そこで，電流出力を変えられる特別の電流源をもってきて，電流を 0 から I まで徐々に増加させいく．

いま，電流がすでに I' になっており，さらに dI'/dt の割合で増加しつつあるとする．コイルには逆起電力

$$V_L'(t) = -L\frac{dI'(t)}{dt} \tag{12.33}$$

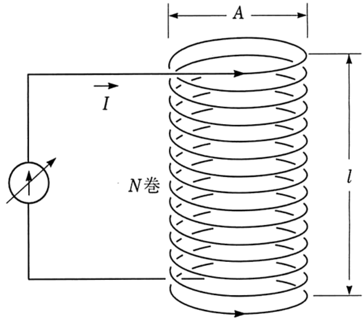


図 12.6

が生じているはずであるが，

用意した電流源にはこれを打ち消すだけの起電力

$$\mathcal{E}'(t) = -V_L'(t) = L\frac{dI'(t)}{dt} \tag{12.34}$$

が自動的に生じて電流を予定通り流し続けることができる．このようなやり方で無限小の時間 dt の間に電流源がする仕事は

$$dW = \mathcal{E}'(t)\,I'(t)\,dt = L\frac{dI'}{dt}I'\,dt \tag{12.35}$$

だから，時刻 T に電流が I になるまでの仕事は

$$W = \int dW = \int_0^T L\frac{dI'}{dt}I'\,dt = \frac{L}{2}\int_0^T \frac{dI'^2}{dt}dt \tag{12.36}$$

である．

$$\frac{dI'^2}{dt} = 2I'\frac{dI'}{dt} \tag{12.37}$$

を利用した．ここで $I'^2 = x'$，$I^2 = x$ と置くと，

$$W = \frac{L}{2}\int_0^T \frac{dx'}{dt}dt = \frac{L}{2}\int_0^x dx' = \frac{1}{2}Lx = \frac{1}{2}LI^2 \tag{12.38}$$

である．

電流をこのように回路（ソレノイド）に流すことによって，最初には存在しなかった磁場が回路の周り（ソレノイドの内部）に発生する．よって，これに等しいエネルギー

$$U_L = W = \frac{1}{2}LI^2 \tag{12.39}$$

がこの磁場に蓄えられていると考えてよいだろう．

いま，このソレノイドの断面積 A, 長さ l, 全巻き数が N であるとすると，ソレノイドの自己インダクタンスは（9.40）より

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \tag{12.40}$$

である．よって，(12.38) より

$$U_L = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 A}{l}I^2 \tag{12.41}$$

である．これがエネルギーとしてソレノイドの内部 (体積 Al) の磁場 (図 12.7) に蓄えられているとすると，エネルギー密度は

$$u_{\mathrm{m}} = \frac{U_L}{Al} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2}{l^2}I^2 \tag{12.42}$$

である．

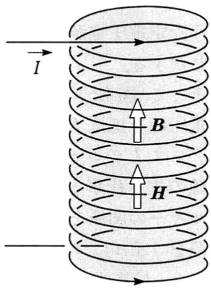


図 12.7

ところで，ソレノイドに電流 I が流れているときの $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ は，両端付近を除いて一様で，その大きさは（8.64）より

$$H = \frac{NI}{l}, \qquad B = \frac{\mu_0 NI}{l} \tag{12.43}$$

である．したがって，エネルギー密度（12.45）は

$$u_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\frac{NI}{l}\frac{\mu_0 NI}{l} = \frac{1}{2}HB = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \tag{12.44}$$

と書くことができる．この計算は，ソレノイドの外の場を無視し，同時にソレノイド両端の場も中央部と同じ均一な場であるという近似を用いており，

厳密ではないが，結論は正しい．一般に，真空中の磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$，磁場の強さ $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の点 $\boldsymbol{r}$ における**磁場のエネルギー密度**は

$$u_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\frac{B(\boldsymbol{r})^2}{\mu_0} \qquad (12.45)$$

である．

u_{m} の次元と SI 単位は

$$[u_{\mathrm{m}}] = [H][B] = QT^{-1}L^{-1}[F]Q^{-1}L^{-1}T = [F]L^{-2}$$
$$= [\text{仕事}]L^{-3} = [\text{エネルギー}]L^{-3}: \quad \mathrm{J/m^3} \qquad (12.46)$$

で，確かに単位体積当りのエネルギーになっている．

定電圧源と磁場のエネルギー

上の説明の最初の，理想的電流源を用いた仕事の計算はなじみにくい面がある．最終的に一定の電流 I が流れている状態になったときにはコイルの逆起電力は 0 だから，電流源の起電力も 0 である．したがって，電流は流れていても電流源は仕事をしていないし，どこにもエネルギーの損失は発生していない．これは，電池のような定電圧電源や抵抗のある導線に慣れているわれわれには少々現実離れした感じがする．

そこで，図 12.8 のように，起電力 $\mathcal{E}$ の定電圧源を抵抗 R を介して自己インピーダンス L のコイルにつないだ状態で，電源のする仕事と磁場に蓄えられるエネルギーの関係を調べてみよう．(定電圧源をコイルにつなぐとき，抵抗を介しないと，最終的にコイルに無限大の電流が流れることになる．)

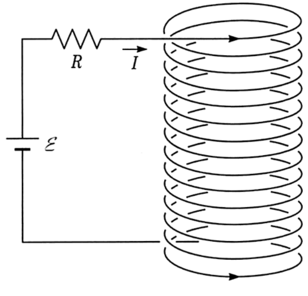


図 12.8

時刻 $t = 0$ にスイッチ S を閉じて電流を流し始める．§10.2 で学んだように，電流は図 10.7 のように

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}[1 - e^{-(R/L)t}] \qquad (12.47)$$

にしたがって増加し，十分長いとき $T(\gg L/R)$ の後には，定常的な電流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \tag{12.48}$$

になる．

この間，ソレノイドの両端の逆起電力は

$$V_L(t) = -L\frac{dI(t)}{dt} = -\mathcal{E}\,e^{-(R/L)t} \tag{12.49}$$

にしたがって変化し，$t = T$ では $V_L = 0$ になっている．負号は，$V_L(t)$ の向きが電流の向きと逆になっていることを意味するから，いわばソレノイドの中にエネルギーが注入されている．無限小時間 dt の間に注入されるエネルギーは

$$dW = |I(t)\,V_L(t)|\,dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R}e^{-(R/L)t}[1 - e^{-(R/L)t}]\,dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R}[e^{-(R/L)t} - e^{-2(R/L)t}]\,dt \tag{12.50}$$

だから，時刻 T までに注入されたエネルギーは

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{L}} = \int dW &= \int_0^T \frac{\mathcal{E}^2}{R}[e^{-(R/L)t} - e^{-2(R/L)t}]\,dt \\ &= -\frac{\mathcal{E}^2 L}{R^2}e^{-(R/L)t}\Big|_0^T + \frac{\mathcal{E}^2 L}{2R^2}e^{-2(R/L)t}\Big|_0^T \\ &= \frac{\mathcal{E}^2 L}{R^2} - \frac{\mathcal{E}^2 L}{2R^2} = \frac{\mathcal{E}^2 L}{2R^2} = \frac{1}{2}LI^2 \end{aligned} \tag{12.51}$$

である．$e^{-(R/L)T} = 0$ とした．これは出力可変の電流電源を用いた過程でソレノイドの磁場に蓄えられるエネルギー U_L（12.39）に等しい．

一方，この間に電源がした仕事は

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{S}} &= \mathcal{E}\int_0^T I(t)\,dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^T (1 - e^{-(R/L)t})\,dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left[t + \frac{L}{R}e^{-(R/L)t}\right]_0^T \\ &= \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left(T + \frac{L}{R}e^{-(R/L)T} - \frac{L}{R}\right) = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left(T - \frac{L}{R}\right) \end{aligned} \tag{12.52}$$

で，抵抗 R に発生したジュール熱は

$$\begin{aligned} W_R &= R\int_0^T I(t)^2 dt = R\frac{\mathcal{E}^2}{R^2}\int_0^T (1 - e^{-(R/L)t})^2 dt \\ &= \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^T (1 - 2e^{-(R/L)t} + e^{-2(R/L)t})\,dt \\ &= \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left[t + 2\frac{L}{R}e^{-(R/L)t} - \frac{L}{2R}e^{-(2R/L)t}\right]_0^T \\ &= \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left(T + 2\frac{L}{R}e^{-(R/L)T} - \frac{L}{2R}e^{-2(R/L)T} - \frac{2L}{R} + \frac{L}{2R}\right) \\ &= \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left(T - \frac{3L}{2R}\right) \end{aligned} \tag{12.53}$$

である．ともに T の関数で，時間が増えると増加する．しかし，その差は

$$W_S - W_R = \frac{\mathcal{E}^2 L}{2R^2} = \frac{1}{2} L I^2 = U_L \tag{12.54}$$

であり，この時点で磁場に蓄えられているエネルギー(12.38)に等しい．電源はなおも $\mathcal{E}I = RI^2$ の仕事率(電力)で仕事を続けており，それはすべて抵抗でジュール熱となって消費されているので，W_S と W_R は T に依存して増加する．しかし，磁場のエネルギーは I が変化している間に蓄えられたもので，電流が一定になった状態ではもはや増加しない．

§12.3　エネルギーと力

ポテンシャルエネルギーや場のエネルギーは電荷や電流の配置に直接関係している．そして，そのエネルギーを減らすような配置に変ろうとする傾向をもっている．その傾向を広い意味の「力」で表すことができる．配置を表す変数 α(たとえば座標）が $\Delta\alpha$ だけ変ったときにその力 F_α がする仕事は，ポテンシャルエネルギー $U(\alpha)$ の減少になる．

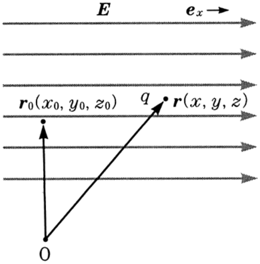


図 12.9

$$-\Delta U(\alpha) = F_\alpha \Delta\alpha \tag{12.55}$$

たとえば，図 12.9 のように，x の正の方向を向いた一様な電場

$$\boldsymbol{E} = E\,\boldsymbol{e}_x \tag{12.56}$$

の中にある電荷 q は力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = qE\,\boldsymbol{e}_x \tag{12.57}$$

を受けているが，この力を次のようにして求めることもできる．電荷 q の位置座標を $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ とすると，点 $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ を基準とするポテンシャルエネルギーは

$$U(\boldsymbol{r}) = -qE(x - x_0) \tag{12.58}$$

である．この電荷を，Δx だけ移動させたときのポテンシャルエネルギーの変

化は

$$\Delta U(\boldsymbol{r}) = -qE(x+\Delta x-x_0)-[-qE(x-x_0)] = qE\Delta x \tag{12.59}$$

である．よって，この電荷が受ける x 方向の力は（12.55）より

$$F_x = -\frac{\Delta U(\boldsymbol{r})}{\Delta x} = qE \tag{12.60}$$

である．一方，y 方向や z 方向に Δy あるいは Δz だけ移動させても

$$\Delta U(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{12.61}$$

だから

$$F_y = F_z = 0 \tag{12.62}$$

である．よって確かに (12.57) の力が得られた．このようにして力を知る方法を**仮想変位の方法**という．

別の例として，図12.10のような，極板の面積 A，間隔 d の平行板コンデンサーの極板間の電位差が V のときに極板間にはたらく力を計算してみよう．このコンデンサーの静電容量と極板の電荷は

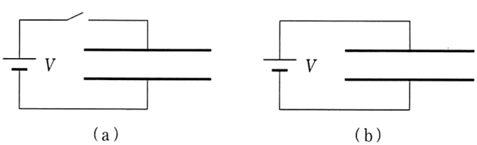


図 12.10

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}, \qquad q = CV \tag{12.63}$$

で，蓄えられているエネルギーは（12.4）より

$$U(d) = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{q^2}{2C} \tag{12.64}$$

である．極板には互いに異なる符号の電荷が帯電しているから，この力は引力のはずである．これを仮想変位の方法で求めるためには，極板間を Δd だけ変化させたときのエネルギー変化を計算すればよい．ところが，$\Delta d > 0$ の変化をさせたとき容量の変化は $\Delta C < 0$ であるが，(1)　図 12.10 (a)のように

充電した後，電源をはずして電荷 $q=$ 一定 の状態でこの変化をさせた場合は $\Delta U(d)>0$，(2)　図 (b) のように極板間に電源をつないで電位差 $V=$ 一定 の状態でこの変化をさせた場合は $\Delta U(d)<0$ である．よって，不用意に計算すると力の向きが逆になってしまう．

実は (2) の場合は電源がする仕事 (電荷の供給) をともなうのでそれを考慮しなければならない．単純な計算が可能なのは (1) の場合のみである．すなわち，電源を切って極板間の距離を Δd だけ変化させたときの $U(d)$ の変化は

$$\Delta U(d)=\frac{q^2}{2\dfrac{\varepsilon_0 A}{d+\Delta d}}-\frac{q^2}{2\dfrac{\varepsilon_0 A}{d}}=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}\Delta d \tag{12.65}$$

である．よって，力は

$$\Delta F_d=-\frac{\Delta U(d)}{\Delta d}=-\frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}=-\frac{q^2}{zcd}=-\frac{qV}{2d}=-\frac{1}{2}qE \tag{12.66}$$

である．$F<0$ だから d を減らす向きの力，すなわち引力がはたらいている．(2)の条件の下での正しい計算については，章末演習問題を参照のこと．

演習問題

［**1**］ 極板の面積 $A=0.1\,\mathrm{m}^2$，極板間隔 $d=1\,\mathrm{mm}$ の平行板コンデンサーの極板間の電圧が 100 V のとき，極板の間の空間に蓄えられている静電エネルギーとその密度を求めなさい．極板間に比誘電率 $\kappa_e=2$ の誘電体で満たしたときはどうか．

［**2**］ 半径 a の球状に一様な密度 ρ で分布した電荷のエネルギーを (4.30) の考え方で計算しなさい．

［**3**］ 半径 $a=1\,\mathrm{cm}$，長さ $l=20\,\mathrm{cm}$ で総巻き数が 400 回のソレノイドコイルに

1 A の電流が流れているときに内部の空間に蓄えられている磁気エネルギーとその密度を求めなさい．ソレノイドにちょうど収まるサイズの比透磁率 $\mu_0 = 1000$ の磁気的に軟らかい強磁性体を挿入した場合はどうか．

［4］ §12.3 で調べた平行板コンデンサーの極板間の力を，図 12.10 (b) のような極板間の電位差が一定の条件で，仮想変位の方法より求めなさい．

［5］ 一様な電場 $\boldsymbol{E}$ の中に置かれた電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ が，$\boldsymbol{E}$ と平行な向きから θ だけ傾いているときに受けるトルクを仮想変位の方法で求めなさい．

［6］ 図 12.11 のような磁極の中央部の磁束密度が $B_0 = 0.5$ T で一定に保たれているとする．磁化率 $\chi_m = 1.8 \times 10^{-6}$ の物質を幅 $a = 1$ cm，厚さ $d = 1$ mm の板状にして，中央付近まで挿入したときに受ける力の向きと大きさを仮想変位の方法で求めなさい．

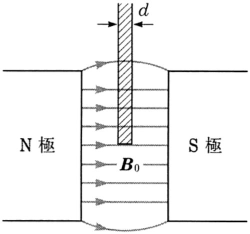


図 12.11

付録　マクスウェル方程式の微分形

本書を通じてわれわれは，電場の強さ $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を電荷にはたらく力

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{A.1}$$

によって定義し，基本法則である電荷の保存則を

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{V}} \rho(\boldsymbol{r}, t)\,dV = -\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.2}$$

で表し，さらに電束密度の場 $\boldsymbol{D}$ と磁場の強さの場 $\boldsymbol{H}$ を導入した上で，4 個のマクスウェル方程式の積分形(3.34)，(9.5)，(8.91)，(9.49)

$$\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{V}} \rho(\boldsymbol{r}, t)\,dV \tag{A.3}$$

$$\oint_{l} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{r} = -\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.4}$$

$$\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{A.5}$$

$$\oint_{l} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{S}} \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.6}$$

を導いた．電磁気学の基本法則はこれだけである．(但し (A.2) はマクスウェル方程式にとり込まれており，独立ではない．) この付録では (A.2) ～ (A.6) の微分形を導く．その準備として，まずベクトル場の発散と回転について学ぶ．

A.1　ベクトル場の発散

第 2 章で学んだように，任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を流束密度の場のように見なすと，面積分

$$\Phi_{\mathrm{A}} = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.7}$$

は図 2.14 のように面 S を貫いて $d\boldsymbol{S}$ の向きに流れる流束を表す．また

$$\Phi_{\mathrm{A}} = \oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.8}$$

は閉曲面 S の内側から外側へ向かって流れ出す全流束を表す．このとき $d\boldsymbol{S}$ は必ず外向きにとる．

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と同じ空間に存在する $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の**発散**とよばれるスカラー場を $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と書き

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{A.9}$$

で定義する．ここで，S は図 A.1 のような点 $\boldsymbol{r}$ の周りの微小体積 ΔV の全表面積であり，$d\boldsymbol{S}$ は S の表面の外向きの面素ベクトルである．(したがって，左辺の $\boldsymbol{r}$ は ΔV 内部の特定の一点，右辺の $\boldsymbol{r}$ は ΔV 表面上の諸点を表すことに注意する．) 同じ空間に，関連するが異なる複数の場を定義することは，これまでも行ってきた．電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ に重ねて，電束密度ベクトルの場 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ や，静電ポテンシャルのスカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ 等を定義したのが，その例である．$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の定義 (A.9) を言葉で解釈すると，「流束密度ベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ をもつ流れの，微小体積 ΔV の表面 S を通して外に向かう全流束を ΔV で除したものの極限」である．これは $\Delta V \to 0$ の極限で分子も $\to 0$ になり，比が ∞ に発散しないで一定になる場合にのみ意味をもつ．つまり，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は一種の微分である．これがスカラー場であることは，流束が $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$ というスカラー積の和 (積分) であることから明らかであろう．

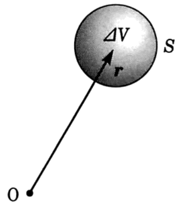


図 A.1

A.2　ガウスの定理

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の定義 (A.9) から，ΔV が十分小さいとき

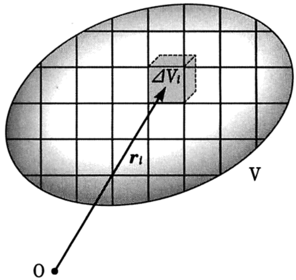
$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{A.10}$$

である．よって

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\Delta V \approx \oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.11}$$

が成り立つ．ただし S は ΔV の全表面である．これが近似の関係なのは，左辺で，

ΔV 内の1点 $\boldsymbol{r}$ の値のみを使っているからであるが，$\Delta V \to 0$ の極限では等号が成り立つ．図A.2のような任意の大きさの体積 V に対しては，それを n 個の微小領域 ΔV_1, ΔV_2, …, ΔV_n に分けると，それぞれの微小領域で (A.11) が成り立つから，それらをすべて加え合わせて，



図A.2

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} \oint_{\mathrm{S}_i} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.12}$$

である．ただし，S_i は i 番目の微小領域 ΔV_i の全表面である．また，$d\boldsymbol{S}$ は各微小部分ごとに外向きにとる．この式の右辺の和について見ると，隣接する ΔV_i の境界面の寄与は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が同じで $d\boldsymbol{S}$ の向きが逆だから符号が逆になり打ち消し合う．よって，もとの体積 V の外表面の寄与のみが残る．両辺について，$\max \Delta V_i$ を0に近づける分割法で $n \to \infty$ とする極限をとれば，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\Delta V_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \oint_{\mathrm{S}_i} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.13}$$

であるが，左辺は積分の定義そのものである．右辺は分割数 n によらずVの外表面Sの寄与のみが残るから，

$$\int_{\mathrm{V}} \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,dV = \oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.14}$$

が得られる．これを**ガウスの定理**という．

この定理は，「ある空間にベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ とその発散の場 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が存在するとき，任意の領域Vの内部で $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,dV$ を加え合わせたものは，Vの全表面S上でベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 自体についての流束 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$ を加え合わせたものに等しい」ことを表している．

A.3 div $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ のデカルト座標表示

前節で学んだように, div $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は座標と無関係に定義されるスカラー場であるが，特定の座標による表示を用いると具体的な計算の際に便利である．ここではデカルト座標 (x, y, z) による表示を求めておこう．

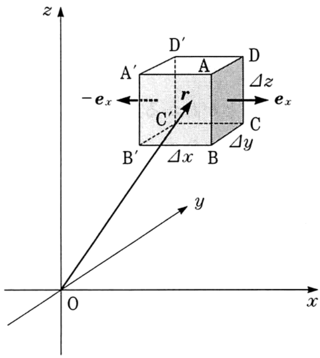


図 A.3

図 A.3 のような任意の点 $\boldsymbol{r}$ を中心として，x 軸，y 軸，z 軸に平行な辺をもつ微小な直方体 ABCDA′B′C′D′ を考える．各辺の長さをそれぞれ Δx，Δy，Δz とすると，その体積は

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \qquad (A.15)$$

である．

S をこの微小な直方体の全表面として (A.9) の右辺の積分を実行するために，まず，x 軸に垂直な面 ABCD と面 A′B′C′D′ について計算する．法線ベクトルが

$$\boldsymbol{n}_{\mathrm{ABCD}} = \boldsymbol{e}_x, \qquad \boldsymbol{n}_{\mathrm{A'B'C'D'}} = -\,\boldsymbol{e}_x \qquad (A.16)$$

であること，ABCD 面の中心の座標が $(x + \Delta x/2, y, z)$ であること等に注意して

$$\int_{\mathrm{ABCD}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{ABCD}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot \boldsymbol{e}_x\, dS = \int_{\mathrm{ABCD}} A_x(\boldsymbol{r})\, dS$$

$$\approx A_x\!\left(x + \frac{\Delta x}{2},\ y,\ z\right)\Delta y \Delta z$$

$$\approx \left(A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \Delta z \qquad (A.17)$$

$$\int_{\mathrm{A'B'C'D'}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \approx -\left(A_x(x, y, z) - \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \Delta z \qquad (A.18)$$

である．ただし (4.47) を利用した．よって，これら 2 面からの寄与の和は

$$\left\{\int_{\mathrm{ABCD}} + \int_{\mathrm{A'B'C'D'}}\right\} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \approx \frac{\partial A_x(\boldsymbol{r})}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x(\boldsymbol{r})}{\partial x}\Delta V \qquad (A.19)$$

である．他の面についても同様に計算すると，6 面全部の寄与の和は

$$\oint \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \approx \left(\frac{\partial A_x(\boldsymbol{r})}{\partial x}+\frac{\partial A_y(\boldsymbol{r})}{\partial y}+\frac{\partial A_z(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right)\Delta V \qquad \text{(A.20)}$$

である．よって（A.9）より

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial A_x(\boldsymbol{r})}{\partial x}+\frac{\partial A_y(\boldsymbol{r})}{\partial y}+\frac{\partial A_z(\boldsymbol{r})}{\partial z} \qquad \text{(A.21)}$$

であることがわかる．つまり，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の発散をデカルト座標の成分で表示すると，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の x 成分の x による偏微分と，y 成分の y による偏微分と，z 成分の z による偏微分の和になっている．（4.55）で定義したナブラ ∇ を用いると

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_x(\boldsymbol{r}),A_y(\boldsymbol{r}),A_z(\boldsymbol{r})) = \nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \qquad \text{(A.22)}$$

のように，形式的に ∇ と $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ のスカラー積のように書ける．

例題 A.1

原点にある点電荷 q の周りのクーロン場（3.7）は，$r=0$ を除いて $\operatorname{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})=0$ を満たすことを示しなさい．

［**解**］

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi r^3} = \frac{q(x,y,z)}{4\pi r^3} \qquad \text{(A.23)}$$

である．よって

$$\frac{\partial D_x(\boldsymbol{r})}{\partial x} = \frac{q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} = \frac{q\left(r^3-3xr^2\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)}{4\pi r^6} = \frac{q(r^2-3x^2)}{4\pi r^5} \qquad \text{(A.24)}$$

である．ただし，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} \qquad \text{(A.25)}$$

を利用した．したがって，（A.21）より

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) &= \frac{q}{4\pi r^5}[(r^2-3x^2)+(r^2-3y^2)+(r^2-3z^2)]\\ &= \frac{q}{4\pi r^5}[3r^2-3(x^2+y^2+z^2)] = 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.26)}$$

である．

A.4　ベクトル場の回転

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と同じ空間に存在する**回転**とよばれるベクトル場を $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$

と書く．ベクトル場は各点 $\boldsymbol{r}$ において大きさと向きの両方を定義する必要がある．大きさと向きを定義する代りに，座標を定めて各成分の大きさを指定してもよい．後者につながる方法をとることにすると，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は任意の向き（単位ベクトルを $\boldsymbol{e}$ とする）の成分が

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{e} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}}{\Delta S} \tag{A.27}$$

であるようなベクトル場である．ただし，ΔS は図 A.4 のように点 $\boldsymbol{r}$ を含み $\boldsymbol{e}$ を法線ベクトルとする微小な平面であり，l はその外周である．（したがって，左辺と右辺の $\boldsymbol{r}$ は別の点を表すことに注意する．）$d\boldsymbol{r}$ の向きはその向きに右ネジを回すと $\boldsymbol{e}$ の方に進むようにとる．右辺を言葉で解釈すると，「微小平面 ΔS の外周 l に沿っての $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の循環（$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ の和）を ΔS で除したものの極限」である．これは，$\Delta S\to 0$ の極限で分子も $\to 0$ になり，この比が ∞ に発散せずに一定になる場合にのみ意味をもつ．つまり，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ も一種の微分である．

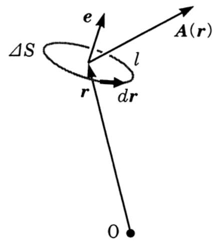


図 A.4

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を成分でなく直接定義しようとすると，大きさが

$$|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})| = \max\left[\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}}{\Delta S}\right] \tag{A.28}$$

で，max のときの向きが $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の向きであるということになる．max[　] は，ΔS の法線の向きをいろいろ変えながら [　　] の中を計算し，それが最大になったとき，という意味である．

A.5　ストークスの定理

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の回転 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の成分の定義（A.27）から，点 $\boldsymbol{r}$ を含む任意の十分微小な面 ΔS の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n} \approx \frac{\oint_l \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}}{\varDelta S} \tag{A.29}$$

である．よって

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}\varDelta S \approx \oint_l \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{A.30}$$

が成り立つ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は $\varDelta S$ の法線ベクトル，l は $\varDelta S$ の外周である．図 A.5 のような任意の大きさの面積をもつ曲面 S に対しては，それを n 個の微小な平面 $\varDelta S, \varDelta S_2, \cdots, \varDelta S_n$ に分けると，それぞれの微小面で (A.30) が成り立つから，それらをすべて加え合わせると，

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\boldsymbol{n}_i\varDelta S_i \approx \sum_{i=1}^{n}\oint_{l_i} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{A.31}$$

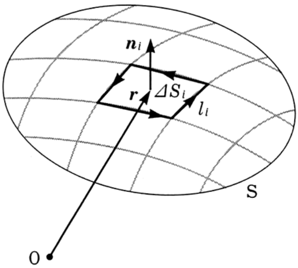


図 A.5

が成り立つ．max $\varDelta S_i$ を 0 に近づける分割法で $n \to \infty$ の極限をとれば，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i)\cdot\boldsymbol{n}_i\varDelta S_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\oint_{l_i} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{A.32}$$

である．左辺は積分の定義そのものである．右辺は分割数によらず隣接する微小平面 $\varDelta S_i$ の間の境界線の寄与は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が同じで $d\boldsymbol{r}$ の向きが逆だから符号が反対なので打ち消し合い，元の曲面 S の外周 l の寄与のみが残る．よって

$$\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{A.33}$$

が成り立つ．これを**ストークスの定理**という．

この定理は，「ある空間にベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ とその回転の場 rot $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が存在するとき，任意の曲面 S を貫く rot $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の流束 rot $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}$ を加え合わせたものは，S の外周 l 上でベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 自体について $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ を加え合わせたもの，すなわち $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の循環に等しい」ことを表している．

A.6 rot $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ のデカルト座標表示

rot $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ のデカルト座標 (x, y, z) による表示を求めておこう．われわれの定義 (A.27) は成分に対する表示で与えられているからそのまま適用すればよい．まず x 成分を求めるために，図 A.6 のように点 $\boldsymbol{r}$ を中心とする，x 軸に垂直な，辺の長さが Δy, Δz の微小な長方形 ABCD を考える．法線ベクトルは $\boldsymbol{e}_x$ で面積は

$$\Delta S = \Delta y \Delta z \tag{A.34}$$

である．l をこの微小長方形の外周として，(A.27) を計算すれば $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))_x$ が求まる．

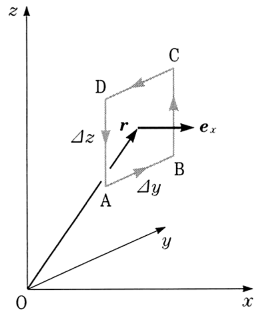


図 A.6

まず，辺 AB と辺 CD について計算すると，

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{r}_{\mathrm{AB}} &= |d\boldsymbol{r}|\boldsymbol{e}_y = dl\,\boldsymbol{e}_y \\ d\boldsymbol{r}_{\mathrm{CD}} &= -|d\boldsymbol{r}|\boldsymbol{e}_y = -dl\,\boldsymbol{e}_y \end{aligned}\right\} \tag{A.35}$$

であること，辺 AB の中点の座標が $(x, y, z - \Delta z/2)$ であること等に注意して，

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot \boldsymbol{e}_y\,dl = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} A_y(\boldsymbol{r})\,dl \\ &\approx A_y\left(x, y, z - \frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y \\ &\approx \left(A_y(x, y, z) - \frac{\partial A_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y \end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \approx -\left(A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta y \tag{A.37}$$

である．よって，これら 2 面からの寄与の和は

$$\left\{\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} + \int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}}\right\}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} \approx -\frac{\partial A_y(\boldsymbol{r})}{\partial z}\Delta y \Delta z = -\frac{\partial A_y(\boldsymbol{r})}{\partial z}\Delta S \tag{A.38}$$

である．辺 BC と DA についても同様に計算すると，4 辺全部の寄与の和は

$$\oint_{\mathrm{ABCDA}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \approx \left(\frac{\partial A_z(\boldsymbol{r})}{\partial y} - \frac{\partial A_y(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right)\Delta S \tag{A.39}$$

である．よって，(A.27) より

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))_x = \frac{\partial A_z(\boldsymbol{r})}{\partial y} - \frac{\partial A_y(\boldsymbol{r})}{\partial z} \tag{A.40}$$

であることがわかる．同様に他の 2 成分は

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))_y = \frac{\partial A_x(\boldsymbol{r})}{\partial z} - \frac{\partial A_z(\boldsymbol{r})}{\partial x} \tag{A.41}$$

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))_z = \frac{\partial A_y(\boldsymbol{r})}{\partial x} - \frac{\partial A_x(\boldsymbol{r})}{\partial y} \tag{A.42}$$

である．ナブラ ∇ を用いると

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (A_x(\boldsymbol{r}), A_y(\boldsymbol{r}), A_z(\boldsymbol{r})) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{A.43}$$

のように，形式的に ∇ と $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ のベクトル積の形に書ける．

例題 A.2

原点を通る直線電流 I の周りの磁場の強さ (8.32) は，$\xi = 0$，つまり，電流上の点を除いて $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0$ を満たすことを示しなさい．

［**解**］ デカルト座標を用いると

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \boldsymbol{e}_\varphi = \left(-\frac{y}{\xi}, \frac{x}{\xi}, 0\right) \tag{A.44}$$

より，(8.32) は

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{2\pi\xi}\frac{(-y, x, 0)}{\xi} = \frac{I(-y, x, 0)}{2\pi\xi^2} \tag{A.45}$$

である．よって

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}))_x = \frac{\partial H_z(\boldsymbol{r})}{\partial y} - \frac{\partial H_y(\boldsymbol{r})}{\partial z} = 0 - 0 = 0 \tag{A.46}$$

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}))_y = \frac{\partial H_x(\boldsymbol{r})}{\partial z} - \frac{\partial H_z(\boldsymbol{r})}{\partial x} = 0 - 0 = 0 \tag{A.47}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}))_z &= \frac{\partial H_y(\boldsymbol{r})}{\partial x} - \frac{\partial H_x(\boldsymbol{r})}{\partial y} \\ &= \frac{I}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\xi^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\xi^2}\right) \\ &= \frac{I}{2\pi}\left(\frac{\xi^2 - 2x^2}{\xi^4} + \frac{\xi^2 - 2y^2}{\xi^4}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{I}{2\pi} \frac{2\xi^2 - 2(x^2 + y^2)}{\xi^4} = 0 \tag{A.48}$$

である．ただし，

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{x}{\xi}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{y}{\xi} \tag{A.49}$$

を利用した．したがって $\xi \neq 0$ の点で

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = (0, 0, 0) \tag{A.50}$$

である．

A.7 電荷の保存則の微分形

以上で数学的な準備ができたので，手始めに，「自然界から正または負の電荷が単独で消えることはない」ことを表す法則 (A.2) の微分形を求めよう．ここに，V は空間内の任意の体積，S はその全表面である．

よく見ると，(A.2) の右辺はガウスの定理 (A.14) の右辺の形をしている．ガウスの定理は任意のベクトル場について成り立つ数学の定理だから，ここで利用すると，

$$\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{V}} \mathrm{div}\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)\, dV \tag{A.51}$$

である．一方，(A.2)の左辺は V 内の電荷の総量を求めてから時間で微分したものであるが，これは各点の電荷密度の時間微分を領域 V 内で積分したものに等しい．

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathrm{V}} \rho(\boldsymbol{r}, t)\, dV = \int_{\mathrm{V}} \frac{\partial \rho(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} dV \tag{A.52}$$

ここで左辺の積分は領域 V が異なれば値が異なるが，個々の点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数ではないので，時間のみの関数と見なすことができる．よって左辺の時間に関する微分は常微分である．これに対して $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ は各点 $\boldsymbol{r}$, 各時刻 t に対して値の定まる関数なので，右辺の $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ に対する時間に関する微分は偏微分になっている．(A.51)，(A.52) を (A.2) に代入すると

$$\int_{\mathrm{V}} \frac{\partial \rho(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} dV = -\int_{\mathrm{V}} \mathrm{div}\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)\, dV \tag{A.53}$$

である．あるいは

$$\int_V \left[\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\right] dV = 0 \tag{A.54}$$

である．これが任意に選んだ領域Vについて成り立つのだから，被積分関数は各点，各時刻で0でなければならない．よって

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = 0 \qquad \text{または} \qquad \frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{A.55}$$

である．これが電荷の保存則の微分形である．このように各点 $\boldsymbol{r}$ に成り立つ方程式を**局所的な方程式**という．これに対して，冒頭の積分形のように，ある領域内の点の集合の間に成り立つ方程式を**非局所的な方程式**という．

例題 A.3

(A.55) から逆に積分形 (A.2) を導きなさい．

［**解**］ (A.55) がすべての点 $\boldsymbol{r}$ で成り立っているから，任意の領域Vについて

$$\int_V \left[\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\right] dV = 0 \tag{A.56}$$

である．(A.51)，(A.52) より，これは

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(\boldsymbol{r},t)\,dV + \oint_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{A.57}$$

である．ただし，SはVの全表面である．

A.8　マクスウェル方程式の微分形

さてそれでは，マクスウェル方程式の微分形を順に求めよう．

まず，電荷に対するガウスの法則(A.3)について考える．左辺は，数学の定理であるガウスの定理 (A.14) の右辺の形をしているから

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\,dV \tag{A.58}$$

である．よって，

$$\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\cdot dV = \int_V \rho(\boldsymbol{r},t)\,dV \tag{A.59}$$

となる．これが任意の領域V（ただし，左辺と右辺で同一の領域）について成り立

つので，被積分関数が各点 $\boldsymbol{r}$，各時刻 t で等しくなければならない．(A.54)のように一度左辺に集めて考えてもよい．よって，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t) \quad \text{または} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{A.60}$$

である．これがガウスの法則の微分形である．

デカルト座標の成分による表示は（A.21）より

$$\frac{\partial D_x(\boldsymbol{r},t)}{\partial x}+\frac{\partial D_y(\boldsymbol{r},t)}{\partial y}+\frac{\partial D_z(\boldsymbol{r},t)}{\partial z}=\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{A.61}$$

である．

ここで，電荷分布はすべて空間的な広がりをもって連続的に存在しており，点電荷は存在しないとした．点電荷 q が点 $\boldsymbol{r}$ に孤立して存在すると，$\boldsymbol{r}$ の周りの微小領域の体積 $\varDelta V$ をいくら小さくとってもその中に q が含まれるから

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\lim_{\varDelta V\to 0}\frac{q}{\varDelta V}\to\infty \tag{A.62}$$

となってその点の電荷密度は無限大だからである．（**ディラックの δ 関数**を用いて形式的にとり込むことは可能であるが，それについては省略する．）太さのない幾何学的な線の上に存在している線電荷，厚さのない面の上に存在している面電荷も(体積)電荷密度としては無限大に発散している．これらはマクスウェル方程式の微分形とはなじまない．ただし，点電荷の 3 次元的な集合体を扱う場合には，粗視化によって体積電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ で表現すれば，微分形にとり込むことができる．

次に，電場の循環に対するマクスウェル方程式，すなわち，静電場の性質と誘導電場の性質を表現した法則(A.4)の微分形を求めよう．左辺は数学の定理であるストークスの定理（A.33）の右辺と同じ形をしているから

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\mathrm{S}}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.63}$$

と書ける．S は (A.4) の右辺の S と同じく l を外周とする任意の面である．一方，右辺は面 S 全体を貫く磁束を時間で微分したものであるが，これは磁束密度の時間微分（偏微分）を面上で積分したものに等しいはずである．

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, r)\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\mathrm{S}}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.64}$$

(A.63)，(A.64) を (A.3) に代入すると，

$$\int_{\mathrm{S}}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_{\mathrm{S}}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.65}$$

となる．これが任意の面 S について成り立つのだから，各点，各時刻で

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \quad \text{または} \quad \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{A.66}$$

が成り立っていなければならない．これがマクスウェル方程式の第 2 式の微分形である．デカルト座標の成分による表示は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_z(\boldsymbol{r})}{\partial y} - \frac{\partial E_y(\boldsymbol{r})}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\\
\frac{\partial E_x(\boldsymbol{r})}{\partial z} - \frac{\partial E_z(\boldsymbol{r})}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\\
\frac{\partial E_y(\boldsymbol{r})}{\partial x} - \frac{\partial E_x(\boldsymbol{r})}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}
\end{aligned} \tag{A.67}$$

この $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ は当然 静電場（クーロン場）と誘導電場を含む．もし，磁束密度が時間的に変化しない場合には

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \quad \text{または} \quad \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{A.68}$$

となるが，これは静電場しか存在しないときの方程式，すなわち静電ポテンシャルの存在の根拠となった式(4.11)の微分形である．一般に，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が保存場である条件は (4.5) であるが，その微分形が

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{または} \quad \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{A.69}$$

であることは同様にしてわかる．

マクスウェル方程式の残りの 2 式を微分形に直すのは，同様にして簡単にできる．磁束密度についてのガウスの法則 (A.5) は

$$\int_{\mathrm{V}}\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\,dV = 0 \tag{A.70}$$

が任意の体積 V について成り立つことと同様だから，各点，各時刻で

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0 \quad \text{または} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{A.71}$$

である．デカルト座標の成分による表示は省略する．

最後にアンペールの法則（A.6）は，

$$\int_{\mathrm{S}}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{\mathrm{S}}\left[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right]\cdot d\boldsymbol{S} \tag{A.72}$$

が，任意の面Sについて成り立つことと同等だから，各点，各時刻において，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \quad \text{または} \quad \nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{A.73}$$

である．デカルト座標の成分による表示は省略する．

ここで，電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ について注意しておくと，(8.39 a) の右辺は面Sを貫く全電流であるが，太さのない幾何学的な線の上を流れている電流については，それに垂直な微小面を $\varDelta S$ として電流密度を定義しようとしても

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\lim_{\varDelta S\to 0}\frac{I}{\varDelta S}\to\infty \tag{A.74}$$

であるから，定義できない．厚さのない面を流れる面電流についても同様である．よって，微分形のマクスウェル方程式にとり込める電流は，すべて有限の断面に広がって流れており，電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ で表現できるものでなければならない．一方，(8.39) の形に書いた積分形にはその制限はない．

ところで，われわれが本書の第12章までで用いてきたマクスウェル方程式の積分形は，非局所的な形で表現されているために，各点での場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ そのものを直接には与えない．この付録で学んだ微分形は，局所的な形で表現された，それぞれの場所ごとに成り立つ法則である．しかし，これも各点での場そのものを与えず，場の発散や回転という微分を与えるだけである．これは，ある意味で当然で，場は，原因となっている電荷や電流の配置や境界での場の値によって多様に変るものなのである．それがどう変ろうと必ず成り立つ法則が，積分形あるいは微分形で書かれたマクスウェル方程式である．

演習問題略解

第 1 章

[**1**] 題意より，$\boldsymbol{A}=\left(\dfrac{\sqrt{3}\,A}{2},-\dfrac{A}{2}\right)$，$\boldsymbol{B}=\left(\dfrac{\sqrt{3}\,A}{2},\dfrac{A}{2}\right)$だから

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\left(\frac{\sqrt{3}\,A}{2}\right)^2+\left(-\frac{A}{2}\right)\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{A^2}{2}$$

となり，[例題 1.1]，[例題 1.2] の結果と一致する．いかなる座標を選んでもこの結果は同じ．

[**2**] $F=8.99\times10^9\dfrac{1\times1}{1}=mg$ より $m=9.2\times10^8\,\mathrm{kg}=9.2\times10^5\,\mathrm{t}$

[**3**] 電荷の中点を原点として，電荷を結ぶ線を x 軸，垂直二等分線を y 軸とするデカルト座標を定める．y 軸上では電場の x 成分は打ち消し合い，y 成分のみ．

$$E_y=2k\frac{q}{a^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}=2k\frac{qy}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

これが最大になる位置は，

$$\frac{dE_y}{dy}=2kq\frac{(a^2+y^2)^{3/2}-3y^2(a^2+y^2)^{1/2}}{(a^2+y^2)^3}=2kq\frac{a^2-2y^2}{(a^2+y^2)^{5/2}}=0$$

より　$a^2-2y^2=0$，つまり，$y=\pm\,a/\sqrt{2}$．

[**4**] $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=k\dfrac{q\boldsymbol{r}}{r^3}=k\dfrac{q\,(a,b,0)}{(a^2+b^2)^{3/2}}$　より

$$E_x=k\frac{qa}{(a^2+b^2)^{3/2}},\qquad E_y=k\frac{qb}{(a^2+b^2)^{3/2}},\qquad E_z=0$$

[**5**] (a)　$E_x=0$，　$E_y=k\dfrac{\sqrt{3}\,q}{a^2}$，　(b)　$E_x=k\dfrac{q}{a^2}$，　$E_y=0$

[**6**] C に置いたとき：　$F_C=2k\dfrac{qQ}{a^2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}+k\dfrac{qQ}{(\sqrt{2}\,a)^2}=k\dfrac{qQ}{a^2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\right)$

P に置いたとき：　$F_P=k\dfrac{qQ}{(\sqrt{2}\,a/2)^2}=k\dfrac{2qQ}{a^2}$

よって F_P の方が $2/(\sqrt{2}+1/2)\approx1.04$ 倍だけ大きい．

[**7**] (a)　z 軸上の電場は z 成分のみ：

$$z>d/2:\quad E_z(0,0,z)=k\frac{q\,(2z^2+d^2/2)}{(z^2-d^2/4)^2}$$

$$-d/2 < z < d/2 : \quad E_z(0,0,z) = -k\frac{2qdz}{(z^2-d^2/4)^2}$$

$$z < -d/2 : \quad E_z(0,0,z) = -k\frac{q(2z^2+d^2/2)}{(z^2-d^2/4)^2}$$

x 軸上の電場は x 成分のみ：　$E_x(x,0,0) = k\dfrac{2qx}{(x^2+d^2/4)^{3/2}}$

（b）　z 軸上の電場は z 成分のみ：

$$z > d/2 : \quad E_z(0,0,z) = k\frac{2dqz}{(z^2-d^2/4)^2}$$

$$-d/2 < z < d/2 : \quad E_z(0,0,z) = -k\frac{q(2z^2+d^2/2)}{(z^2-d^2/4)^2}$$

$$z < -d/2 : \quad E_z(0,0,z) = -k\frac{2dqz}{(z^2-d^2/4)^2}$$

x 軸上の電場は z 成分のみ：　$E_z(x,0,0) = -k\dfrac{qd}{(x^2+d^2/4)^{3/2}}$

第 2 章

［**1**］

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d(1+x)^\alpha}{dx} = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad \cdots, \\ &\frac{d^n(1+x)^\alpha}{dx^n} = \alpha\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \end{aligned}\right\} \text{より}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \cdots, \quad \frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x \quad \text{より} \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\log(1+x) = \frac{1}{1+x}, \quad \cdots, \\ &\frac{d^n}{dx^n}\log(1+x) = (-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdots(n-1)\frac{1}{(1+x)^n} \end{aligned}\right\} \text{より}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \cdots$$

［**2**］　長方形：　$S = \displaystyle\int_{\text{長方形}} dS = \int_0^a dx \int_0^b dy = ab$

円：　$S = \displaystyle\int_{\text{円}} dS = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy = 2\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$x = a\sin\theta$，$dx = a\cos\theta\,d\theta$，$x = -a \to a$　のとき $\theta = -\dfrac{\pi}{2} \to \dfrac{\pi}{2}$

$$S = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 \cos^2\theta\, d\theta = a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$
$$= a^2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi a^2$$

[**3**]　$M = \int \rho(x)\, t\, dS = t\int_0^a (\rho_0 + kx)\, dx \int_0^b dy = abt\left(\rho_0 + \frac{1}{2}ka\right)$

[**4**]　$v_1 S_1 = v_2 S_2$　より　$v_1/v_2 = S_2/S_1$

[**5**]　線状電荷分布の中心を原点とし，電荷に沿って x 軸を選び，注目する点を通るように y 軸を選ぶ．対称性から，注目する点の電場は y 成分のみなので，y 成分だけを重ね合わせればよい．

$$E_y = \int_{-l/2}^{l/2} k\frac{\lambda\, dx}{x^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int_{-l/2}^{l/2}\frac{k\lambda a\, dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$x = a\tan\theta$ と置くと，

$$(x^2+a^2)^{3/2} = [a^2(1+\tan^2\theta)]^{3/2} = \frac{a^3}{\cos^3\theta},\qquad dx = \frac{a\, d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$x = -\frac{l}{2} \to \frac{l}{2}\quad \text{のとき}\quad \theta = -\theta_0 \to \theta_0\quad \left(\sin\theta_0 = \frac{l/2}{\sqrt{a^2+(l/2)^2}}\right)$$

よって

$$E_y = \int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{k\lambda a^2\cos^3\theta\, d\theta}{a^3\cos^2\theta} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{k\lambda\cos\theta\, d\theta}{a} = \frac{2k\lambda\sin\theta_0}{a}$$
$$= \frac{k\lambda l}{a\sqrt{a^2+(l/2)^2}}$$
$$l\to\infty\quad \text{なら}\quad E_y = \frac{k\lambda}{a\sqrt{a^2/l^2+1/4}} \to k\frac{2\lambda}{a}$$

[**6**]　線密度 λ_1 の電荷分布が線密度 λ_2 の電荷分布の位置に作る電場の強さは $E = k\dfrac{2\lambda_1}{a}$ だから，線密度 λ_2 の電荷分布の長さ Δl の部分が受ける力は $f\Delta l = k\dfrac{2\lambda_1\lambda_2\Delta l}{a}$．よって，単位長さ当りの力は $f = k\dfrac{2\lambda_1\lambda_2}{a}$．

第 3 章

[**1**]　$R_0 = 1.1\times 10^{-15}\times 27^{1/3} = 3.3\times 10^{-15}\,\mathrm{m}$

$$E = 8.99\times 10^9\frac{13\times 1.6\times 10^{-19}}{(2\times 3.3\times 10^{-15})^2} = 4.3\times 10^{20}\,\mathrm{N/C}$$

[**2**]　表面積：　$dS = a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$　だから

$$S = \int_S dS = a^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = a^2 \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} = 4\pi a^2$$

体積：　$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ より

$$V = \int_V dV = \int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{a^3}{3} \times 2 \times 2\pi = \frac{4\pi a^3}{3}$$

［**3**］ 円筒側面上の積分：　$\displaystyle\int_{側面} f(\boldsymbol{r})\, \xi\, d\varphi\, dz$

体積積分：　$\displaystyle\int_V f(\boldsymbol{r})\, \xi\, d\xi\, d\varphi\, dz$

［**4**］ 中心軸（z 軸とする）に垂直な成分は打ち消し合って z 成分だけが残る．よって，最初から z 成分だけを加え合わせればよい．円筒座標で計算する．

$$\boldsymbol{E} = \oint_l \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + a^2)} \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \boldsymbol{e}_z = \frac{\lambda z}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} a\, d\varphi\, \boldsymbol{e}_z$$

$$= \frac{\lambda a z}{2\varepsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \boldsymbol{e}_z$$

［**5**］ 中心軸（z 軸とする）に垂直な成分は打ち消し合って z 成分だけが残る．よって最初から z 成分だけを加え合わせればよい．円筒座標で計算する．

$$\boldsymbol{E} = \int_S \frac{\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + a^2)} \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + a^2}} \boldsymbol{e}_z = \int_0^a \frac{\sigma z \xi\, d\xi}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + \xi^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi\, \boldsymbol{e}_z$$

$$= \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^a \frac{\xi\, d\xi}{(z^2 + \xi^2)^{3/2}} \boldsymbol{e}_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2 + \xi^2}}\right]_0^a \boldsymbol{e}_z$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right] \boldsymbol{e}_z$$

［**6**］ 対称性より　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(r)\,\boldsymbol{e}_r$．半径 r の球にガウスの法則を適用．

$$(3.34)\ の左辺 = \oint_S D(r)\,\boldsymbol{e}_r \cdot dS\, \boldsymbol{e}_r = 4\pi r^2 D(r)$$

$r < a$　では　右辺 $= 0$　→　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = 0$，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$

$r > a$　では　右辺 $= 4\pi a^2 \sigma$　→　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\sigma a^2}{r^2} \boldsymbol{e}_r$,　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2} \boldsymbol{e}_r$

［**7**］ 対称性より　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(r)\,\boldsymbol{e}_r$．半径 r の球にガウスの法則を適用．

$$\oint_S D(r)\,\boldsymbol{e}_r \cdot dS\, \boldsymbol{e}_r = 4\pi r^2 D(r)$$

$r \leqq a_1$：　$q_{内部} = 0$　→　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = 0$,　$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$

$a_1 \leqq r \leqq a_2$：　$q_{内部} = \dfrac{4\pi\rho}{3}(r^3 - a_1^3)$,　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\rho}{3r^2}(r^3 - a_1^3)\,\boldsymbol{e}_r$,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(r^3 - a_1^3)\,\boldsymbol{e}_r$$

$$r \geqq a_2: \quad q_{内部} = \frac{4\pi\rho}{3}(a_2{}^3 - a_1{}^3), \qquad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho}{3r^2}(a_2{}^3 - a_1{}^3)\,\boldsymbol{e}_r,$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(a_2{}^3 - a_1{}^3)\,\boldsymbol{e}_r$$

[8]　分布の中心軸を z 軸とする円筒座標で計算する．z 軸の周りの半径 ξ，高さ l の円筒にガウスの法則を適用する．

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(\xi)\,\boldsymbol{e}_\xi \;\rightarrow\; \oint \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 2\pi\xi l\, D(\xi)$$

$$r \leqq a: \quad q_{内部} = \pi\xi^2 l\rho \;\rightarrow\; \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\xi\rho}{2}\boldsymbol{e}_\xi, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\xi\rho}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_\xi$$

$$r \geqq a: \quad q_{内部} = \pi a^2 l\rho \;\rightarrow\; \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{a^2\rho}{2\xi}\boldsymbol{e}_\xi, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{a^2\rho}{2\varepsilon_0\xi}\boldsymbol{e}_\xi$$

[9]　円筒の軸を z 軸とする円筒座標で計算する．半径 ξ，高さ l の円筒にガウスの法則を適用する．

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(\xi)\,\boldsymbol{e}_\xi \;\rightarrow\; \oint \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 2\pi\xi l\, D(\xi)$$

$$r < a: \quad q_{内部} = 0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$r > a: \quad q_{内部} = 2\pi a l\sigma \;\rightarrow\; \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{a\sigma}{\xi}\boldsymbol{e}_\xi, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0\xi}\boldsymbol{e}_\xi$$

[10]　中央付近について円筒座標で計算する．半径 ξ，高さ l の円筒を考えると

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(\xi)\,\boldsymbol{e}_\xi \;\rightarrow\; \oint \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 2\pi\xi l\, D(\xi)$$

$$r < a: q_{内部} = 0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$a < r < b: q_{内部} = 2\pi a l\sigma_a = \frac{ql}{L} \;\rightarrow\; \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{2\pi\xi L}\boldsymbol{e}_\xi, \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\xi L}\boldsymbol{e}_\xi$$

$$r > b: q_{内部} = 2\pi a l\sigma_a + 2\pi b l\sigma_b = 0 \;\rightarrow\; \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

[11]　中心通る面に垂直な軸を z とする．

（a）　対称性より中心付近の電場は面に垂直だから，面を含む底面積 ΔA，高さ Δh の微小な円筒を考えると，$\Delta A \to 0$，$\Delta h \to 0$ の極限で

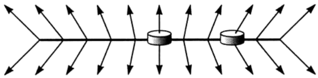
$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 2\Delta A\, D(r), \qquad q_{内部} = \sigma\Delta A$$

よって，表：　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\sigma}{2}\boldsymbol{e}_z$,　　裏：　$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{\sigma}{2}\boldsymbol{e}_z$.

（b）　中心付近を離れると電場は面に垂直ではなくなるが，中心を含む底面積 A，高さ h の微小な円筒にガウスの法則を適用する．$h \to 0$ の極限をとることにより，側面の寄与が無視でき，面のすぐ近くの点についてだけ成り立つ式として

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} = 2A\, D_z(\boldsymbol{r}), \qquad q_{内部} = \sigma A$$

よって，表：$D_z(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\sigma}{2}$，　裏：$D_z(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{\sigma}{2}$ のように z 成分についての情報が得られ，電場は図のようになっていることがわかる．



第 4 章

［**1**］ $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$ より $q = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E = \dfrac{3.3 \times 10^6}{8.99 \times 10^9} = 3.7 \times 10^{-4}\,\mathrm{C}$

［**2**］ $\phi(\boldsymbol{r}) = \displaystyle\oint_l \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}} \oint_l dl = \frac{a\lambda}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}}$

$$E_x = E_y = 0, \qquad E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{a\lambda z}{2\varepsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

［**3**］ $\phi(\boldsymbol{r}) = \displaystyle\int_0^a \frac{\sigma 2\pi\xi\, d\xi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2 + \xi^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{z^2 + \xi^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\Big[\sqrt{z^2 + \xi^2}\Big]_0^a =$
$\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2 + a^2} - z)$

$$E_x = 0, \qquad E_y = 0, \qquad E_z = -\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right]$$

［**4**］ $\displaystyle\left(\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$

$$= \frac{-(x - x')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -\frac{x - x'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

$$\therefore\quad \nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = -\frac{(x - x', y - y', z - z')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = -\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = -\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^2}\boldsymbol{e}_{r-r'}$$

［**5**］ x 軸上： $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{p\boldsymbol{e}_z}{4\pi\varepsilon_0 x^3} = -8.99 \times 10^{-9} \times \dfrac{1.3 \times 10^{-29}}{(2 \times 10^{-10})^3}\boldsymbol{e}_z$

$$= -1.5 \times 10^{-8}\,\boldsymbol{e}_z\,\mathrm{V/m}$$

z 軸上： $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{3p\boldsymbol{e}_z - p\boldsymbol{e}_z}{4\pi\varepsilon_0 z^3} = \dfrac{2p}{4\pi\varepsilon_0 z^3}\boldsymbol{e}_z$

$$= 8.99 \times 10^{-9}\frac{2 \times 1.3 \times 10^{-29}}{(2 \times 10^{-10})^3}\boldsymbol{e}_z = 2.9 \times 10^{-8}\,\boldsymbol{e}_z\,\mathrm{V/m}$$

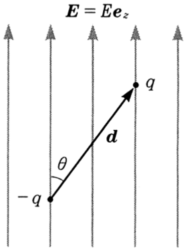
［**6**］ $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_z$ とし $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ とする．$\boldsymbol{p}$ の向きを固定して動かすのには仕事を要しないので，$-q$ の位置を中心に $+q$（位置 $\boldsymbol{r}$）を回転させるときのポテンシャルエネルギーを考えればよい．

$$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = E\,dz = Ed\,(d\cos\theta) = -\,Ed\sin\theta\,d\theta$$

だから，$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{p}\,(\theta=\pi/2)$ の場合を基準とすると

$$U(\theta) = -\int_{\pi/2}^{\theta} -\,qd\,E\sin\theta\,d\theta$$

$$= -\,pE\Big[\cos\theta\Big]_{\pi/2}^{\theta} = -\,pE\cos\theta = -\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$$



［**7**］ $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$ 等に注意して，$\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{e}_z$ のとき (4.73) より

$$E_x(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r})}{\partial x} = -\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{3}{r^4}\frac{x}{r}\right]$$

$$= \frac{3xzp}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

$$E_y(\boldsymbol{r}) = \frac{3yzp}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

$$E_z(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pr^3 - pz\cdot 3r^2z/r}{r^6} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3pz^2}{r^5} - \frac{p}{r^3}\right]$$

まとめると

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right]$$

第 5 章

［**1**］ $\sigma = \varepsilon_0 E = 8.85\times10^{-8}\,\mathrm{C/m^2}$

［**2**］ $C = 4\pi\varepsilon_0 a$

地球：　$C = 710\times10^{-12}\times10^{6} = 7.10\times10^{-4}\,\mathrm{F}$

太陽：　$C = 774\times10^{-12}\times10^{8} = 7.74\times10^{-2}\,\mathrm{F}$

［**3**］ $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$，　$A = \dfrac{Cd}{\varepsilon_0} = \dfrac{1\times10^{-3}}{8.854\times10^{-12}} = 1.13\times10^{8}\,\mathrm{m^2}$

［**4**］ $E = \dfrac{V}{d}$，　$mg = eE = e\dfrac{V}{d}$

電子：　$V = \dfrac{mgd}{e} = \dfrac{9.11\times10^{-31}\times9.8\times0.1}{1.60\times10^{-19}} = 5.6\times10^{-12}\,\mathrm{V}$

陽子：　$V = \dfrac{1.67\times10^{-27}\times9.8\times0.1}{1.60\times10^{-19}} = 1.0\times10^{-8}\,\mathrm{V}$

［**5**］ 半径 a の球殻に q，半径 b の球殻に $-\,q$ の電荷を与えたときの球殻間の電

場は

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

だから，球殻間の電位差は

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

よって

$$C = \frac{q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b - a}$$

［**6**］ このとき円筒が帯電した電荷を $\pm q$, 内側の円筒の表面電荷密度を σ とすると，円筒間の電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 \xi}\boldsymbol{e}_\xi$$

だから，円筒内の電位差は

$$\mathcal{E} = -\int_b^a \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_b^a \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 \xi}d\xi = -\frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\log\frac{a}{b} = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\log\frac{b}{a}$$

よって

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathcal{E}}{\log\dfrac{b}{a}}\frac{1}{\xi}\boldsymbol{e}_\xi$$

［**7**］ 円筒極板の電荷を q とすると

$$q = 2\pi a l\sigma = \frac{2\pi l\varepsilon_0 \mathcal{E}}{\log\dfrac{b}{a}}$$

よって

$$C = \frac{q}{\mathcal{E}} = \frac{2\pi l\varepsilon_0}{\log\dfrac{b}{a}}$$

$d = b - a \ll a$ のときは

$$\log\frac{b}{a} = \log\frac{a + d}{a} = \log\left(1 + \frac{d}{a}\right) \approx \frac{d}{a}$$

より

$$C \approx \frac{2\pi l a\varepsilon_0}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

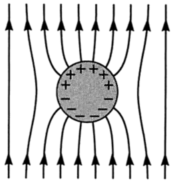
［**8**］ 鏡像電荷で考える．

（a） $F = \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$

（b） 表面電荷密度は (5.35) で与えられているから，導体表面を S とすると，

$$q_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} \sigma(\boldsymbol{r})\,dS = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{aq\xi\,d\xi}{2\pi(\xi^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{aq}{\sqrt{\xi^2 + a^2}}\Bigg|_0^{\infty} = -q$$

［**9**］　中心を原点とする極座標で考える．［例題 4.5］(4.79), (4.80) より，仮に球面上に $\sigma(\boldsymbol{r}) = \sigma_0 \cos\theta$ なる表面電荷が生じると，それが内部に作る電場の強さは $\boldsymbol{E} = -\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z$ である．この一様な場が一様な外場 $\boldsymbol{E}_0$ を打ち消しているはずだから



$$\sigma_0 = 3\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0$$

である．このとき，周りの電場は (4.84) で

$$\rho\delta = \sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0$$

と置いたものに外場を加えたものであり

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{2a^3 E_0 \cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + a^3 E_0 \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta}{r^3} + E_0 \boldsymbol{e}_z$$

第 6 章

［**1**］　$\dfrac{R_3}{R_2} = \dfrac{R_x}{R_1} \quad \rightarrow \quad R_x = \dfrac{R_1 R_3}{R_2}$

［**2**］　単位時間当りの発熱を Q_1, Q_2 とすると

直列：　I が共通だから　$Q_1 = R_1 I^2 < R_2 I^2 = Q_2$

並列：　$\mathcal{E}$ が共通だから　$Q_1 = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R_1} > \dfrac{\mathcal{E}^2}{R_2} = Q_2$

［**3**］　合成抵抗 R が r に等しいときか，可能な範囲で最も r に近づいたとき発熱の和が最大になる．

$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

i）　$R_1 > r$　のとき　$R_2 = 0$　で最大

ii）　$R_1 < r$　かつ　$R_3 > r - R_1$　のとき　$R = r$　つまり

$$R_2 = \frac{(r - R_1) R_3}{R_3 - (r - R_1)} \quad \text{で最大}$$

iii）　$R_1 < r$　かつ　$R_3 > r - R_1$　のとき　$R_2 = \infty$　で最大

［**4**］　求める電流を I とすると，中心軸から ξ の点の電流の密度の大きさは

$$j(\xi) = \frac{I}{2\pi\xi l}$$

だから，その点の電場の大きさは

$$E(\xi) = \sigma j(\xi) = \frac{\sigma I}{2\pi\xi l}$$

よって

$$\mathcal{E} = \int_a^b E(\xi)\,d\xi = \frac{\sigma I}{2\pi l}\int_a^b \frac{d\xi}{\xi} = \frac{\sigma I}{2\pi l}\log\frac{b}{a}$$

$$I = \frac{2\pi l\mathcal{E}}{\sigma\log\dfrac{b}{a}}$$

[**5**]　物質中に $\boldsymbol{j}$ に平行な側面をもつ底面積 ΔA，高さ Δl の微小な円柱を考えると，その中での消費電力は

$$\Delta P = \Delta R(\Delta I)^2 = \frac{\rho\Delta l}{\Delta A}(j\Delta A)^2 = \rho j^2 \Delta l\,\Delta A$$

$$\therefore\quad p = \frac{\Delta P}{\Delta l\,\Delta A} = \rho j^2 = \frac{j^2}{\sigma}$$

[**6**]　電流計と抵抗を流れる電流の和が kI_0 のときに電流計には I_0 の電流が流れているようにすればよい．

$$rI_0 = R(kI_0 - I_0) \qquad \text{より} \qquad R = \frac{r}{k-1}$$

[**7**]　電流計と抵抗にかかる電圧が V_0 のとき電流が I_0 だけ流れるようにすればよい．

$$I = \frac{V_0}{r+R} \qquad \text{より} \qquad R = \frac{V_0}{I_0} - r$$

である．だたし，I_0 より十分大きな電流が流れている部分の電圧しか精度よく測れない．

第 7 章

[**1**]　コップは薄いので平行板コンデンサーの式で容量を計算してよい．（第5章演習問題 [7]）

$$A = \pi\times 2.5^2 + 2\pi\times 2.5\times 9 = 20 + 141 = 161\ \mathrm{cm^2} = 0.0161\ \mathrm{m^2}$$

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} = \frac{2\times 8.85\times 10^{-12}\times 0.0161}{3\times 10^{-4}} = 9.4\times 10^{-10}\ \mathrm{F}$$

[**2**]　その部分の表面の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると

$$\boldsymbol{D} = \sigma\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\boldsymbol{n}$$

$$\sigma_P = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{D} - \varepsilon_0\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{n} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\sigma$$

[**3**]　極板の電荷密度を $\pm\sigma$ とすると $D = \sigma$ で，誘電率 ε_1 の部分では $E_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_1}$，$\varepsilon_2$ の部分では $E_2 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_2}$ だから

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_2}(d - d_1)$$

よって

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\sigma A}{\dfrac{\sigma}{\varepsilon_1}d_1 + \dfrac{\sigma}{\varepsilon_2}(d - d_1)} = \frac{A\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1(d - d_1)}$$

[**4**]　極板の電位差を V とすると，誘電率 ε_1 の部分の極板の電荷密度 $\sigma_1 = D_1 = \varepsilon_1\dfrac{V}{d}$，$\varepsilon_2$ の部分の電荷密度 $\sigma_2 = \varepsilon_2\dfrac{V}{d}$

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\dfrac{\varepsilon_1 VA_1}{d} + \dfrac{\varepsilon_2 V(A - A_1)}{d}}{V} = \frac{\varepsilon_1 A_1 + \varepsilon_2(A - A_1)}{d}$$

[**5**]

$$r < a \quad で \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

$$r > a \quad で \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(r)\,\boldsymbol{e}_r = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$$

よって

$$a < r < b \quad で \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) - \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$$

$$r > b \quad で \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

誘電体の内表面の分極表面電荷密度は

$$\sigma_a = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\cdot(-\boldsymbol{e}_r)\Big|_{r=a} = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{q}{4\pi a^2}$$

外表面では

$$\sigma_b = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{e}_r\Big|_{r=b} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{q}{4\pi b^2}$$

[**6**]　図 7.15 のような微小円筒を考えると

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{n}\varDelta A - \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{n}\varDelta A = \sigma(\boldsymbol{r})\varDelta A$$

$$\therefore\quad D_n(\boldsymbol{r}) - D_n(\boldsymbol{r}') = \sigma(\boldsymbol{r})$$

(7.51) は電荷の有無にかかわらず成り立つから

$$E_t(\boldsymbol{r}) - E_t(\boldsymbol{r}') = 0$$

体積密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ の真電荷があるとき，図 7.15 のような微小円筒内の電荷は，高さ→0 にすると 0 になるから，(7.50) もそのまま成り立つ．

［**7**］ (7.50) の両辺を (7.52) の両辺で除して

$$\frac{D(\boldsymbol{r})\cos\theta}{E(\boldsymbol{r})\sin\theta} = \frac{D(\boldsymbol{r}')\cos\theta'}{E(\boldsymbol{r}')\sin\theta'}$$

両方の誘電体で (7.44) が成り立つ場合には

$$\frac{\varepsilon}{\tan\theta} = \frac{\varepsilon'}{\tan\theta'}$$

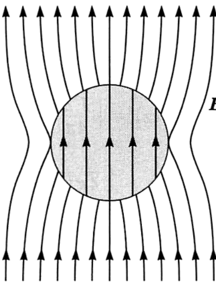
［8］ $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = P\boldsymbol{e}_z$ (一様) を仮定して，矛盾がなければそれが求める場である．

$$\sigma_P(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_r = P\cos\theta$$

であるが，これは［例題 4.5］で考えたのと同じ形の表面電荷分布だから，(4.79) と比較して

$$\boldsymbol{E}_P = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}$$

である．



$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= \chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}\\ &= \chi_e\varepsilon_0(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_P)\\ &= (\kappa_e - 1)\varepsilon_0(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_P)\\ &= (\kappa_e - 1)\varepsilon_0\left(\boldsymbol{E}_0 - \frac{\boldsymbol{P}}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{\chi_e - 1}{3}\right)\boldsymbol{P} = (\kappa_e - 1)\xi_0\boldsymbol{E}_0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{P} = \frac{3(\kappa_e - 1)\varepsilon_0}{\kappa_e + 2}\boldsymbol{E}_0 \qquad \text{(確かに一様)}$$

$$\therefore\quad \sigma_P = \frac{3(\kappa_e - 1)}{\kappa_e + 2}\boldsymbol{E}_0\cos\theta$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_P = \left[1 - \frac{\kappa_e - 1}{\kappa_e + 2}\right]\boldsymbol{E}_0 = \frac{3}{\kappa_e + 2}\boldsymbol{E}_0$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{3\kappa_e\varepsilon_0}{\kappa_e + 2}\boldsymbol{E}_0$$

外部では (4.82) において $q\delta \to \frac{4}{3}\pi a^3\rho\delta = \frac{4}{3}\pi a^3 P$ として，さらに外場を加え

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{E}_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[4\pi a^3 P\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r - \frac{4}{3}\pi a^3 P\,\boldsymbol{e}_z\right]\\ &= \boldsymbol{E}_0 + \frac{(\kappa_e - 1)a^3}{(\kappa_e + 2)r^3}[3(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{E}_0]\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}_0 + \frac{\varepsilon_0(\kappa_e - 1)a^3}{(\kappa_a + 2)r^3}[3(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{E}_0]$$

第 8 章

［1］ 略

［2］ $\boldsymbol{B} = \dfrac{4\pi \times 10^{-7} \times 1}{2\pi \times 0.1} = 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$

［3］ $\Phi = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \mu_0 \int_0^a dy \int_x^{x+b} \frac{I\,d\xi}{2\pi\xi} = \mu_0 \frac{aI}{2\pi} \log \frac{x+b}{x}$

（ただし，符号は，電流の向きに進むように右ネジを回す向きを正とした.）

［4］ $F = \mu_0 \dfrac{10^2}{2\pi}\left(\dfrac{0.1}{0.01} - \dfrac{0.1}{0.06}\right) = 2 \times 10^{-5} \times (10 - 1.67) = 1.67 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}$

［5］ 円筒座標で計算する．対称性より，z 軸上の磁場は z 成分のみであるから，z 成分だけを重ね合わせればよい.

$$dH_z(z) = \left|\frac{I\,d\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{e}_{r-r'}}{4\pi(z^2+a^2)}\right| \frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

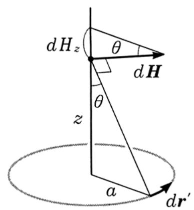
$$= \frac{Ia\,dl}{4\pi(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{Ia^2 d\varphi}{4\pi(z^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\therefore\quad H_z(z) = \int_0^{2\pi} \frac{Ia^2 d\varphi}{4\pi(z^2+a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{Ia^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\boldsymbol{H}(z) = \frac{Ia^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}} \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{B}(z) = \frac{\mu_0 Ia^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}} \boldsymbol{e}_z$$



$a = 10\,\mathrm{cm}$, $I = 1\,\mathrm{A}$ のとき

$$B(0) = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 0.1^2}{2 \times 0.1^3} = 2\pi \times 10^{-6}\,\mathrm{T} = 6.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

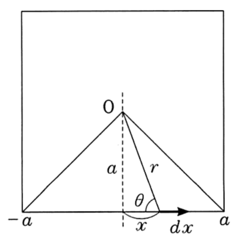
$$B(10\,\mathrm{cm}) = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 0.1^2}{2 \times (0.1^2 + 0.1^2)^{3/2}}$$

$$= 2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

［6］ 各辺が作る磁場は回路面に垂直で等しいから，一辺の寄与を計算して 4 倍すればよい．ビオ－サバールの法則より

$$dH(0) = \frac{1}{4\pi} \frac{I\,dx \sin\theta}{r^2}$$

$$r = \frac{a}{\sin\theta},\quad x = \frac{a}{\tan\theta},\quad dx = -\frac{a\,d\theta}{\sin^2\theta}$$



$$\therefore \quad dH(0) = -\frac{1}{4\pi}\frac{Ia(d\theta/\sin^2\theta)\sin\theta}{(a/\theta)^2} = -\frac{I\sin\theta\, d\theta}{4\pi a}$$

$x = -a \to a$ のとき　$\theta = \frac{3}{4}\pi \to \frac{\pi}{4}$

$$H(0) = -\frac{I}{4\pi a}\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\sin\theta\, d\theta = \frac{I}{4\pi a}\Big[+\cos\theta\Big]_{3\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}\, I}{4\pi a}$$

4 辺の寄与を加えて

$$H(0) = \frac{\sqrt{2}\, I}{\pi a}$$

[7]　$H = nI = \frac{20}{0.01}\times 10 = 2\times 10^4\ \mathrm{A/m}$

$$B = \mu_0 H = 4\pi\times 10^{-7}\times 2\times 10^4 = 8\pi\times 10^{-3}\ \mathrm{T} = 2.5\times 10^{-2}\ \mathrm{T}$$

[8]　回転軸を z 軸とする極座標で考える．表面の $\theta \sim \theta + d\theta$ の部分の速さは $a\omega\sin\theta$ だから，面電流密度は $\sigma a\omega\sin\theta$ である．この部分の電流 $\sigma a\omega\sin\theta\times a\, d\theta$ が中心に作る磁場の強さは $\boldsymbol{e}_z$ に平行で

$$dH(0) = \frac{\sigma a^2\omega\sin\theta\, a^2\sin^2\theta\, d\theta}{2a^3}$$

$$H(0) = \int_0^\pi \frac{\sigma\omega a\sin^3\theta\, d\theta}{2} = \frac{\sigma\omega a}{2}\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\sigma\omega a}{2}\Big[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_0^\pi = \frac{\sigma\omega a}{2}\Big[2 - \frac{2}{3}\Big] = \frac{\sigma\omega a}{3}$$

$$\boldsymbol{H}(0) = \frac{\sigma\omega a}{3}\boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{B}(0) = \frac{\mu_0\sigma\omega a}{3}\boldsymbol{e}_z$$

[9]　$J = \frac{I}{a}$　　向きは電流の向き

$H = J = \frac{I}{a}$,　$B = \mu_0\frac{I}{a}$　向きは電流の向きに垂直

[10]　(a)　$J_a = \frac{I}{2\pi a}$,　$J_b = \frac{I}{2\pi b}$

(b)　$\xi < a$：　$H = 0$,　$a < \xi < b$：　$H = \frac{I}{2\pi\xi}$,　$\xi > b$：　$H = \frac{I}{\pi\xi}$

(c)　$\xi < a$：　$H = 0$,　$a < \xi < b$：　$H = \frac{I}{2\pi\xi}$,　$\xi > b$：　$H = 0$

[11]　このコイルの磁気モーメント $m = \pi a^2 I = 0.0025\pi\ \mathrm{Am^2}$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$$

$$N = mB\sin\theta = \pi a^2 IB\sin\theta = 0.00025\pi\sin\theta$$

ただし，θ は回路面の法線ベクトルと $\boldsymbol{B}$ の間の角度．

N が最大になるのは $\theta = \pi/2$ のとき　$N = 0.00025\pi = 0.000785\ \mathrm{Nm}$．

N が 0 になるのは $\theta = 0,\ \pi$ のとき．

第 9 章

［**1**］　両辺とも $Q^{-1}L^2MT^{-2}$

［**2**］

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^6 \times \pi \times 0.01^2}{0.2}$$

$$= 2\pi^2 \times 10^{-4} = 2.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{H}$$

［**3**］（a）外側のコイルを貫く内側のコイルの磁束から求める．

$$M = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{1000}{0.2} \times \pi \times 0.01^2 \times 100 = 2\pi^2 \times 10^{-5}\ \mathrm{H} = 2.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{H}$$

（b）$I_1 = \cos 2\pi ft$，　$f = 50\ \mathrm{Hz}$

$$\mathcal{E}_2 = M\frac{dI_1}{dt} = -2\pi f \times 2\pi^2 \times 10^{-5} \sin 2\pi ft$$

$$= -4\pi^3 f \times 10^{-5} \sin 2\pi ft = -2\pi^3 \times 10^{-3} \sin 2\pi ft$$

$$= -6.2 \times 10^{-2} \sin 2\pi ft$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R} = -6.2 \times 10^{-3} \sin 2\pi ft$$　（ピーク値 6.2 mA の交流）

［**4**］　電流に近い辺が x だけ離れているときの長方形回路を貫く磁束は

$$\Phi = \frac{0.10I}{2\pi} \log \frac{x + 0.05}{x}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{0.10I}{2\pi} \frac{-0.05}{x(x + 0.05)} \frac{dx}{dt} = \frac{-0.005I}{2\pi x(x + 0.05)} \times 0.01$$

$$I = -\frac{1}{10}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{-5 \times 10^{-7}}{2\pi x(x + 0.05)}$$

$$x = 0.01 \quad \text{のとき} \quad |I| = \frac{5 \times 10^{-7}}{2\pi \times 0.01 \times 0.06} = 1.3 \times 10^{-4}\ \mathrm{A}$$

［**5**］　回転軸を地磁気に垂直に置くと最大の起電力が得られる．$t = 0$ のときコイルの面が地磁気 $\boldsymbol{B}$ に平行であったとすると

$$|\mathcal{E}| = \left|100\frac{d\Phi}{dt}\right| = \left|100\frac{d}{dt}0.05^2\pi \times 3 \times 10^{-5} \cos 2\pi ft\right|$$

$$= 0.25\pi \times 2\pi f \times 3 \times 10^{-5} \sin 2\pi ft = 1.5\pi^2 \times 10^{-5} f \sin 2\pi ft$$

$$|\mathcal{E}|_{\max} = 1.5\pi^2 \times 10^{-5} \times 50 = 7.4 \times 10^{-3}\ \mathrm{V}$$

［**6**］　$\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -Bav$　（$\boldsymbol{B}$ の向きに進むように右ネジを回す向きを $\mathcal{E}$ の正の向きとする．）

$I = -Bav/R$ より，抵抗の消費される電力は

$$P_R = RI^2 = \frac{B^2a^2v^2}{R}$$

一方，導体棒が受ける力は，(9.26) より

$$\boldsymbol{F} = -\frac{B^2a^2}{R}\boldsymbol{v}$$

で，棒は単位時間に $\boldsymbol{v}$ だけ動くから，棒を動かす力 $-\boldsymbol{F}$ の仕事率は

$$P_F = -\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = +\frac{B^2a^2v^2}{R} = P_R$$

[**7**] (10.16) より，極板の面電荷密度は

$$\sigma(t) = \frac{q(t)}{A} = \frac{C\mathcal{E}}{A}(1 - e^{-t/RC}), \qquad C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t}) = -\sigma(t)\boldsymbol{e}_z$$

変位電流密度： $\dfrac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = -\dfrac{\mathcal{E}}{RA}e^{-t/RC}$

変 位 電 流： $I_D = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\cdot A = -\dfrac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}$

第 10 章

[**1**] 電流を遮断するということは

$$\frac{dI}{dt} = -\infty$$

なる変化である．したがって，コイルの両端に逆起電力

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} = \infty$$

が発生し，これが遮断した導線の両端の間に高い電場を生じて空気が放電する．

[**2**] 合成インピーダンス： $Z = |Z|e^{i\theta}$

$$|Z| = \sqrt{10^2 + (2\pi \times 100 \times 0.05)^2} = 33\,\Omega$$

$$I = \frac{30}{|Z|}\cos(200\pi t - \theta) = 0.91\cos(200\pi t - \theta)$$

$$\tan\theta = \frac{\omega L}{R} = 3.14, \qquad \therefore \quad \theta = 1.26\,\mathrm{rad} = 72^\circ$$

電流は位相が 72° 遅れる．

[**3**]

$$V = \frac{R}{|Z|}\mathcal{E} = \frac{R\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2}}}$$

$$R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2} = \frac{R^2\mathcal{E}^2}{V^2}, \qquad \frac{1}{\omega^2C^2} = R^2\left[\left(\frac{\mathcal{E}}{V}\right)^2 - 1\right]$$

$$C^2 = \frac{1}{\omega^2 R^2\left[\left(\dfrac{\mathcal{E}}{V}\right)^2 - 1\right]}, \qquad \therefore \quad C = \frac{1}{2\pi f R\sqrt{\left(\dfrac{\mathcal{E}}{V}\right)^2 - 1}}$$

[**4**]　$|I| = \dfrac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$　で，共振時は　$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$，$|I| = \dfrac{\mathcal{E}_0}{R}$

だから，求める ω は

$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 2R^2$$

を満たす．

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} + R\right)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} - R\right) = 0$$

$$\therefore \quad LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$$

この方程式の 4 根の中で $\omega > 0$ なのは

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}$$

よって

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}, \qquad f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L}, \qquad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$$

[**5**]　これは CLR の直列回路である．(10.30) で $\mathcal{E} = 0$ と置いた式が成り立つ．電流については (10.31) が成り立つ．(10.35) より

$$D = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC} = 10^6 - 4 \times 10^8 < 0$$

だから，減衰振動

$$\omega = \sqrt{|D|} = 2 \times 10^4, \qquad f = \frac{2 \times 10^4}{2\pi} = 3.2 \times 10^3\ \mathrm{Hz}$$

$$\tau = \frac{2L}{R} = \frac{0.2}{100} = 0.002\ \mathrm{s}$$

つまり，3.2×10^3 Hz で振動しながら時定数 0.002 s で減衰する．

第 11 章

[**1**]　$[nI] = [n][I] = L^{-1}[I] = $[面電流]

[**2**]　場は $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{M}$ ともにドーナツ形の断面に垂直である．断面の中心を通る円に沿った単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とすると

$$\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{M} = M\boldsymbol{e}_\varphi$$

アンペールの法則より

$$lH = NI \rightarrow H = \frac{NI}{l}$$

$$B = \mu H = \frac{\mu_0 \kappa_m NI}{l}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{\kappa_m NI}{l} - \frac{NI}{l} = (\kappa_m - 1)\frac{N}{l}I$$

[**3**]　$\delta \ll a$ なので，空隙内の磁束密度が存在する領域の断面は磁性体の断面と変らない．よって

$$B_{\text{gap}} = B = \mu H, \qquad H_{\text{gap}} = \frac{B_{\text{gap}}}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\mu}{\mu_0}H = \kappa_m H$$

アンペールの法則より

$$NI = H(l - \delta) + H_{\text{gap}}\delta = \frac{l - \delta}{\mu}B + \frac{\delta}{\mu_0}B$$

$$\therefore \quad B = \frac{NI}{\dfrac{l-\delta}{\mu} + \dfrac{\delta}{\mu_0}} = \frac{\mu_0 \kappa_m NI}{l - \delta + \kappa_m \delta} \approx \frac{\mu_0 \kappa_m NI}{l + \kappa_m \delta}$$

$$\kappa_m \delta \ll l \quad \text{なら} \quad B_{\text{gap}} = B = \frac{\mu_0 \kappa_m}{l} NI$$

ただし，たとえば，$\kappa_m = 10^3$，$l = 0.5\,\text{m}$，$\delta = 0.01\,\text{m}$ のときはむしろ，

$$\kappa_m \delta \gg l \quad \text{であり} \quad B_{\text{gap}} \approx \frac{\mu_0 NI}{\delta}$$

[**4**]　磁性体内部で $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$，外部で $\boldsymbol{B}^{\text{out}} = \mu_0 \boldsymbol{H}^{\text{out}}$，$\mu = \kappa_m \mu_0 \gg \mu_0$，$H_{/\!/} = H_{/\!/}{}^{\text{out}}$ だから

$$B_{/\!/} = \mu H_{/\!/} = \mu H_{/\!/}{}^{\text{out}} = \mu \frac{B_{/\!/}{}^{\text{out}}}{\mu_0} = \kappa_m B_{/\!/}{}^{\text{out}} \gg B_{/\!/}{}^{\text{out}}$$

ところが，$B_\perp = B_\perp{}^{\text{out}}$ であるから $\boldsymbol{B}$ は長さ方向に沿っていなければならず，磁性体の中に閉じ込められる傾向にある．(両端面のように $B_\perp \gg B_{/\!/}$ の場合はこの限りでない．)

[**5**]　中心を通り $\boldsymbol{M}$ に平行な z 軸をもつ極座標で表すと，

$$\boldsymbol{J}_M(\theta) = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{e}_r = M\,\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r = M \sin\theta\, \boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{B}(0) = B(0)\,\boldsymbol{e}_z$$

$$dB(0) = \frac{\mu_0 a^2 \sin^2\theta\, M \sin\theta\, a\, d\theta}{2a^3} = \frac{\mu_0 M \sin^3\theta\, d\theta}{2}$$

$$B(0) = \int_0^\pi dB(0) = \frac{\mu_0 M}{2}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{2}{3}\mu_0 M$$

(積分の計算は第 8 章 演習問題［8］を参照)

$$\boldsymbol{B}(0) = \frac{2}{3}\mu_0 M \boldsymbol{e}_z = \frac{2}{3}\mu_0 \boldsymbol{M}, \qquad \boldsymbol{H}(0) = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} = -\frac{\boldsymbol{M}}{3}$$

[**6**]　(11.39) は電流の有無にかかわらず成り立つから，(11.40) はこの場合も成り立つ．一方，図 11.12 のような微小な長方形を考えると，

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{t}\Delta l + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}')\cdot(-\boldsymbol{t})\Delta l = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t})\Delta l$$

$$H_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) - H_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t})$$

である．また，体積電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ の真電流が流れているときは，図 11.12 のような微小長方形を貫く電流は面に垂直な辺 → 0 にすると 0 になるから，(11.42) も成り立つ．

第 12 章

[**1**]
$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{8.85\times10^{-12}\times0.1}{0.001} = 8.85\times10^{-11}\,\mathrm{F}$$

$$U_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\times8.85\times10^{-11}\times100^2 = 4.4\times10^{-7}\,\mathrm{J}$$

$$u_e = \frac{U_e}{0.1\times0.001} = 4.4\times10^{-3}\,\mathrm{J/m^3}$$

$\kappa_e = 2$ の誘電体で満たすと $u_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$ で $\boldsymbol{D}$ が 2 倍になるから

$$U_e = 8.8\times10^{-7}\,\mathrm{J}, \qquad u_e = 8.8\times10^{-3}\,\mathrm{J/m^3}$$

[**2**]　$r \leqq a$ における静電ポテンシャルは (4.35) を ρ で表して

$$\phi(\boldsymbol{r})\ \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3a^2 - r^2)$$

よって，

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{\rho^2}{6\varepsilon_0}(3a^2 - r^2)\,4\pi r^2 dr = \frac{\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\left[a^2r^3 - \frac{r^5}{5}\right]_0^a = \frac{4\pi\rho^2a^5}{15\varepsilon_0}$$

[**3**]
$$L = \frac{\mu_0 N^2\pi a^2}{l} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times400^2\times\pi\times0.01^2}{0.2} = 3.2\times10^{-4}\,\mathrm{H}$$

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2 = 1.6\times10^{-4}\,\mathrm{J}$$

$$u_m = \frac{U_L}{\pi a^2 l} = \frac{1.6\times10^{-4}}{0.01^2\pi\times0.2} = 2.5\,\mathrm{J/m^3}$$

[**4**]　極板間の距離を Δd だけ変えたときの極板間の力に逆らってした仕事を $\Delta U(d)$ とすると，

$$\Delta U(d) = \Delta\left(\frac{1}{2}CV^2\right) - \Delta(QV) \qquad (V = 一定)$$

第 1 項は全エネルギーの変化，第 2 項は電源がした仕事である．

$$\Delta U(d) = \Delta\left(\frac{1}{2}CV^2\right) - \Delta(CV^2) = -\Delta\left(\frac{1}{2}CV^2\right) = -\frac{1}{2}V^2\Delta C$$

$$\Delta C = \frac{\varepsilon_0 A}{d+\Delta d} - \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{1}{1+\Delta d/d} - 1\right) = -\frac{\varepsilon_0 A}{d^2}\Delta d = -C\frac{\Delta d}{d}$$

$$\therefore \quad F_x = -\frac{\Delta U(d)}{\Delta d} = -\frac{CV^2}{2d} = -\frac{qV}{2d} = -\frac{qE}{2}$$

[**5**]
$$U(\theta) = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} = -pE\cos\theta$$

より，角度を θ だけ変えたときのポテンシャルエネルギーの変化は

$$\Delta U(\theta) = pE\cos\theta\,\Delta\theta$$

θ を増す方向へ回転するのに要する「力」は $-\Delta U(\theta)/\Delta\theta$ であるが，θ が無次元の量なので，これはエネルギーの次元をもち，普通の意味の力ではなく，回転させようとするトルクである．その大きさは

$$N_\theta = -\frac{\Delta U(\theta)}{\Delta\theta} = -pE\sin\theta$$

[**6**]　板状物質だから物質内部の磁束密度は $B = B_0 = 0.5\,\mathrm{T}$ としてよい．磁場の領域に x cm 入っているとすると，エネルギーは

$$U(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{B^2}{\mu} - \frac{B_0{}^2}{\mu_0}\right)a\,dx = \frac{B_0{}^2ad}{2\mu_0}\left(\frac{1}{1+\chi_m} - 1\right)x \approx -\frac{B_0{}^2ad}{2\mu_0}\chi_m x$$

これは x のみの関数だから，力は x に平行な向きだけである．

$$F_x = -\frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = \frac{B_0{}^2ad\chi_m}{2\mu_0} = \frac{4.5\times10^{-10}}{8\pi\times10^{-7}} = 1.8\times10^{-4}\,\mathrm{N}\quad(\text{引き込む力})$$

索　　　引

チ

テ

ト

著者略歴

1946年 宮崎県出身．東京大学教養学部基礎科学科卒．同大学院理学系研究科物理学専攻修士課程修了．東京大学院総合文化研究科・教養学部教授を経て，現在，高エネルギー加速器研究機構（KEK）・物質構造科学研究所特別教授．理学博士．

主な著書：「熱学入門」（共著，東京大学出版会），「考える力学」（学術図書出版社）

裳華房テキストシリーズ - 物理学 **電磁気学**

1999年11月20日 第1版発行
2009年2月20日 第10版発行
2011年4月25日 第10版3刷発行

検印省略

定価はカバーに表示してあります．

増刷表示について
2009年4月より「増刷」表示を「版」から「刷」に変更いたしました．詳しい表示基準は弊社ホームページ
http://www.shokabo.co.jp/
をご覧ください．

著者 兵頭(ひょうどう)俊夫(としお)
発行者 吉野和浩
発行所 〒102-0081 東京都千代田区四番町8-1
電話 03-3262-9166～9
株式会社 裳華房
印刷所 中央印刷株式会社
製本所 株式会社 青木製本所

ISBN 978-4-7853-2089-8

裳華房フィジックスライブラリー

著者	書名	定価
木下紀正 著	大学の物理	2940円
高木隆司 著	力学 (Ⅰ)・(Ⅱ)	(Ⅰ)2100円 (Ⅱ)1995円
久保謙一 著	解析力学	2205円
近　桂一郎 著	振動・波動	3465円
原　康夫 著	電磁気学 (Ⅰ)・(Ⅱ)	(Ⅰ)2415円 (Ⅱ)2415円
中山恒義 著	物理数学 (Ⅰ)・(Ⅱ)	(Ⅰ)2415円 (Ⅱ)2415円
香取眞理 著	統計力学	3150円
小野寺嘉孝 著	演習で学ぶ 量子力学	2415円
坂井典佑 著	場の量子論	3045円
塚田　捷 著	物性物理学	3255円
十河　清 著	非線形物理学	2415円
松下　貢 著	フラクタルの物理 (Ⅰ)・(Ⅱ)	(Ⅰ)2520円 (Ⅱ)2520円
齋藤幸夫 著	結晶成長	2520円
中川・蛯名・伊藤 著	環境物理学	3150円
小山慶太 著	物理学史	2625円

裳華房テキストシリーズ－物理学

著者	書名	定価
川村　清 著	力学	1995円
宮下精二 著	解析力学	1890円
小形正男 著	振動・波動	2100円
小野嘉之 著	熱力学	1890円
兵頭俊夫 著	電磁気学	2730円
阿部龍蔵 著	エネルギーと電磁場	2520円
原　康夫 著	現代物理学	2205円
原・岡崎 著	工科系のための 現代物理学	2205円
松下　貢 著	物理数学	3150円
岡部　豊 著	統計力学	1890円
香取眞理 著	非平衡統計力学	2310円
小形正男 著	量子力学	3045円
松岡正浩 著	量子光学	2940円
窪田・佐々木 著	相対性理論	2730円
永江・永宮 著	原子核物理学	2730円
原　康夫 著	素粒子物理学	2940円
鹿児島誠一 著	固体物理学	2520円
永田一清 著	物性物理学	3780円

物理定数表

万有引力定数 G	6.6726×10^{-11} N m²/kg²
真空中の光速 c	2.9979×10^{8} m/s
真空の誘電率 ε_0	8.8542×10^{-12} F/m
$1/4\pi\varepsilon_0$	8.9876×10^{9} m/F
真空の透磁率 μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m
電気素量 e	1.6022×10^{-19} C
電子の質量 m_e	9.1094×10^{-31} kg
陽子の質量 m_p	1.6726×10^{-27} kg
中性子の質量 m_n	1.6749×10^{-27} kg
電子の磁気モーメント μ_e	9.2848×10^{-24} J/T
陽子の磁気モーメント μ_p	1.4106×10^{-26} J/T
中性子の磁気モーメント μ_n	9.6624×10^{-27} J/T
プランク定数 h	6.6261×10^{-34} J s
ボーア半径 a_B	5.2918×10^{-11} m
1 eV のエネルギー	1.6022×10^{-19} J
アボガドロ数 N_A	6.0221×10^{23} mol^{-1}

ギリシャ文字の読み方

A	α	アルファ	I	ι	イオタ	P	ρ	ロー
B	β	ベータ	K	κ	カッパ	Σ	σ	シグマ
Γ	γ	ガンマ	Λ	λ	ラムダ	T	τ	タウ
Δ	δ	デルタ	M	μ	ミュー	Υ	υ	ウプシロン
E	$\varepsilon\epsilon$	イプシロン	N	ν	ニュー	Φ	$\phi\varphi$	ファイ
Z	ζ	ツェータ	Ξ	ξ	クシー	X	χ	カイ
H	η	エータ	O	o	オミクロン	Ψ	ψ	プサイ
Θ	θ	シータ	Π	π	パイ	Ω	ω	オメガ

電磁気学の物理量と単位

物理量	SI 単位	次元
長さ	m（メートル）	L
質量	kg（キログラム）	M
時間	s（秒）	T
振動数	Hz（ヘルツ）	T^{-1}
力	N（ニュートン）	LMT^{-2}
仕事，エネルギー	J（ジュール）	L^2MT^{-2}
仕事率，電力	W（ワット）	L^2MT^{-3}
電荷 q	C（クーロン）	Q
電流 I	A（アンペア）	QT^{-1}
電場の強さ $\boldsymbol{E}$	V/m	$Q^{-1}LMT^{-2}$
電束密度 $\boldsymbol{D}$	C/m²	QL^{-2}
電束 Φ_E	C（クーロン）	Q
電位 ϕ，起電力 $\mathcal{E}$	V（ボルト）	$Q^{-1}L^2MT^{-2}$
電気容量 C	F（ファラッド）	$Q^2L^{-2}M^{-1}T^2$
電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}$	C m	QL
電気分極 $\boldsymbol{P}$	C/m²	QL^{-2}
誘電率 ε	F/m	$Q^2L^{-3}M^{-1}T^2$
電気抵抗 R，インピーダンス Z	Ω（オーム）	$Q^{-2}L^2MT^{-1}$
比抵抗 ρ	Ω m	$Q^{-2}L^3MT^{-1}$
磁場の強さ $\boldsymbol{H}$	A/m	$QL^{-1}T^{-1}$
磁束密度 $\boldsymbol{B}$	T（テスラ）	$Q^{-1}MT^{-1}$
磁気モーメント $\boldsymbol{m}$	J/T = A m²	QL^2T^{-1}
磁束 Φ	Wb（ウェーバー）	$Q^{-1}L^2MT^{-1}$
磁化 $\boldsymbol{M}$	A/m	$QL^{-1}T^{-1}$
透磁率 μ	N/A² = H/m	$Q^{-2}LM$
インダクタンス L	H（ヘンリー）	$Q^{-2}L^2M$

（次元の記号は，L：長さ，M：質量，T：時間，Q：電荷）

[他の単位系でよく用いられる単位]

磁場の強さ（CGS 電磁単位）　1 Oe（エルステッド）= $(1/4\pi) \times 10^3$ A/m

磁束密度（CGS 電磁単位）　1 G（ガウス）= 10^{-4} T